PROGRAMMATION LINÉAIRE

20 Juin 2020
2.0

Table of contents

Objectives

Ce module a pour objectifs de sensibiliser l'étudiant à l'importance pratique des problèmes d'optimisation linéaires, de maîtriser l'ensemble numérique sous-jacent, et de pouvoir utiliser ces techniques dans des problèmes pratiques.

Près-requis

Pour que les étudiants puissent assimilés ce cours il faut bien avoir au moins ces connaissances ci-dessous :

- Mathématiques et informatique générale,
- Métriser le calcul matricielle.

Chapitre II : Méthode Primale de résolution d'un P.L

I

1. Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} max \;\; Z = C^T x, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (2.1)$$

L'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R} / Ax = b,\; x \geq 0\}$ est appelé ensemble des solutions réalisables du problème *(2.1)* où A est une $m \times n$ matrice et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

On note :

$I = \{1, 2, ..., m\}$ l'ensemble des indices des lignes de A.

$J = \{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des indices des colonnes de A.

$A = (I, J)$

2. Bases et solutions de base

Definition: Définition 2.1.

On appelle base du problème *(2.1)* toute sous-matrice carrée $A_B = A(I, J_B)$ telle que$det(A_) \neq 0$ où $J_B = \{j_1, j_2, ..., j_n\} \subset J$.

Example

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $I = \{1, 2\}$ et $J = \{1, 2, 3\}$

$Rang(A) = 2$, si l'on prend $J_B = \{1, 3\}$, $A_B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$,$Det(A_B) = 11$, donc A_B est une base.

Soit A_B une base du problème *(2.1)* qui s'écrit sous forme $A_B = A(I; J_b)$.

En posant $J_N = J / J_B$ on aura $A = [A_B A_N]$ où $A_N = (I; J_N)$ est une sous-matrice de A formée des vecteurs de A qui ne sont pas dans la base A_B (vecteurs non basiques ou hors base).

Le système $Ax = b$; $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ où $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ est équivalent à :

$$Ax = b \quad \equiv \quad A_B x_B + A_N x_N = b \qquad (2.2)$$

En posant $x_N = 0$ on obtient :

$$A_B x_B = b \quad \Rightarrow \quad x_B = A_B^{-1} b.$$

La solution $x_B = A_b^{-1} b$ est appelée solution de base associée `a la base A_B.

Si $x_B \geq 0$ la base associée est dite réalisable

- Une solution de base réalisable est dite non dégénérée si $x_j > 0, \ \forall j \in J_B$.
- Dans le cas contraire, c'est à dire $\exists j \in J_B / x_j = 0$, la solution de base est dite dégénérée.

3. Caractérisation des points extrêmes

Fundamental:Théorème 2.1.

L'ensemble des points extrêmes du polyèdre convexe

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \ x \geq 0\}$$

est égal à l'ensemble de ses solutions de base réalisables.

Fundamental:Corollaire 2.2.

Soit A une $m \times n$-matrice de rang m. Le polyèdre non vide

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \ x \geq 0\}$$

possède un nombre fini de points extrêmes.

Fundamental:Corollaire 2.3

Le polyèdre non vide

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \ x \geq 0\}$$

possède au moins un point extrême.

Fundamental:Théorème 2.4

Soit le polyèdre convexe fermé et borné

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \ x \geq 0\}$$

ayant n points extrêmes $S^1, S^2, ..., S^n$. Tout point de X peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire convexe de ses points extrêmes, c'est à dire :

$$\forall x \in X, \ \ x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S^j, \ \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \ \lambda_j \in [0, 1], \ \ \forall j = 1, 2, ..., n.$$

4. Optimalité en un point extrême

Fundamental:Théorème 2.5.

La fonction objectif du problème *(2.1)* atteint son maximum en un point extrême de l'ensemble X des solutions réalisables.

Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points, elle prendra cette même valeur maximale en tout point qui est combinaison convexe de ces points extrêmes.

5. Critères d'optimalité

5.1. Formule d'accroissements de la fonction objectif

Soit $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$ une solution de base réalisable et $A_B = (I, J_B)$ la matrice de base associée et Soit $\overline{x}$ une autre solution de base réalisable différente de x telle que $\overline{x} = x + \Delta x$. On a alors :

$$\Delta Z = \overline{Z} - Z$$
$$= c^T\overline{x} - c^T x$$
$$= c^T(\overline{x} - x)$$
$$= c^T \Delta x \qquad (2.2)$$

On a $\overline{x},\ x \in \mathbb{R}$ alors :

$$A\overline{x} = b$$
$$Ax = b$$
$$\Rightarrow A\overline{x} - Ax = 0$$
$$\Rightarrow A(\overline{x} - x) = 0$$
$$\Rightarrow A\Delta x = 0$$
$$\Rightarrow A_B\Delta x_B + A_N\Delta x_N = 0$$
$$\Rightarrow A_B\Delta x_B = -A_N\Delta x_N$$
$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N \qquad (2.3)$$

Tenant compte des relations *(2.2)* et *(2.3)* on a :

$$\Delta Z = c_B^T\Delta x_B + c_N^T\Delta x_N$$
$$= c_B^T(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N) + c_N^T\Delta x_N$$
$$= -c_B^TA_B^{-1}A_N\Delta x_N + c_N^T\Delta x_N$$
$$= (-c_B^TA_B^{-1}A_N + c_N^T)\Delta x_N \qquad (2.4)$$

On définit le m-vecteur des potentiels par :

$$u^T = c_B^TA_B^{-1} \qquad (2.5)$$

On définit le m-vecteur des estimations par :

$$E^T = u^TA - c^T \qquad (2.6)$$

La j^{ieme} composante du vecteur des estimations est données par :

$$E_j = u^Ta_j - cj, \quad j \in J \qquad (2.7)$$

d'où

$$\begin{cases} E_B^T = u^TA_B - c_B^T, \\ E_N^T = u^TA_N - c_N^T, \end{cases} \qquad (2.8)$$

des relations *(2.5)* et *(2.7)* la relation *(2.4)* devient :

$\Delta Z = (-u^T A_N + c_N^T)\Delta x_N$
$= -(u^T A_N - c_N^T)\Delta x_N$
$= -E_N^T \Delta x_N$
$= -\sum_{j\in J_N} E_j \Delta x_j$ (2.9)

5.2. Critère d'optimalité

Soit x une solution réalisable de base associée à la base $A_B = (I, J_B)$. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que x soit une solution optimale du problème *(2.1)* ?

Fundamental:Théorème 2.6.

1. L'inégalité $EN \geq 0$ est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable x.
2. L'inégalité $EN \geq 0$ est nécessaire pour l'optimalité de la solution de base réalisable x si celle ci est non dégénérée.
   Si x est une solution optimale non dégénérée, alors $EN \geq 0$

Preuve.

1. Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ une solution réalisable du problème *(2.1)* et soit $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x_B} \\ \overline{x_N} \end{pmatrix}$ une solution réalisable quelconque. On a :
   $\Delta x_N = \overline{x_N} - x_N = \overline{x_N}$
   De la relation *(2.9)* on a :
   $\Delta Z = -\sum_{j\in J_N} E_j \Delta x_j = -E_N^T \Delta x_N$
   si $E_N^T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta Z \leq 0$
   $\Rightarrow Z(\overline{x}) - Z(x) \leq 0$
   $\Rightarrow Z(x) \geq Z(\overline{x}), \quad \forall x \in X$ (2.11)
   donc x est optimale pour le problème *(2.1)*
2. Soit x une solution optimale non dégénérée, c'est à dire :
   $x_i > 0, \quad \forall j \in J_B$ (2.12)
   Montrons que $E_N \geq 0$.
   Supposons que $x_j > 0$, $\forall j \in J_B$, et $\exists j_0 \in J_N$ tel que $E_{j_0} < 0$
   On construit un vecteur $\overline{x}$ de la manière suivante :
   $\overline{x} = x + \theta l, \quad \theta > 0$ (2.13)
   $l \in \mathbb{R}^n / \ A.l = 0$
   $\begin{cases} 1 & si\ j\ =\ j_0, \\ 0 & si\ j \in J_N, \quad j\ =\ j_0, \end{cases}$
   On a :
   $A\overline{x} = A(x + \theta l)$
   $= Ax + \theta A.l$
   $= Ax$
   $= b$ (2.14)
   $A.l = A_B l_B + A_N l_N = 0$
   $\Rightarrow l_B = -A_B^{-1} A_N l_N$
   $\Rightarrow l_B = -A_B^{-1} a_{j_0}$ (2.15)

$$\begin{cases} \overline{x_B} = x_B - \theta(A_B^{-1} a_{j_0}), \\ \overline{x_N} = x_N + \theta l_N \geq 0, \end{cases} \qquad (2.16)$$

De la relation *(2.17)* on a $\overline{x_b} > 0$ pour un certain θ petit, alors :

$A\overline{x} = b\overline{x} \geq 0$ donc $\overline{x}$ est une solution réalisable

De la relation *(2.9)* on a :

$$\begin{aligned} \Delta Z &= -\sum_{j \in J_n} E_j \Delta x_j \\ &= -\sum_{j \in J_n} E_j \theta l_j \\ &= -\theta \sum_{j \in J_n} E_j l_j \\ &= -\theta E_{j_0} > 0 \qquad (2.17) \end{aligned}$$

$$\Delta Z > 0 \quad \Rightarrow \quad Z(\overline{x}) > Z(x)$$

ce qui est contradictoire du fait que x est une solution optimale pour le problème (2.1), donc :

$E \geq 0$

5.3. Condition suffisante d'existence d'une solution non bornée

Fundamental:Théorème 2.7.

La fonction objectif du problème *(2.1)* n'atteint pas son maximum si parmi les composantes non basiques du vecteur des estimations, il existe une qui est strictement négative et pour laquelle correspond le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$.