ST Université A.MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département de 2ème LMD-ST

® 03 Juin 2010

Examen Maths $\widetilde{VI}$

Exercice 1 (10.00 points) :
On considère la fonction $F(x)$ définie par : $F(x) = 2x^2 - 3x - e^{-x}$.

1. Montrer que $F(x) = 0$ admet une solution unique α_1 sur l'intervalle $I_1 = [1; 2]$.
2. **a-** Peut-on appliquer la méthode de Newton pour calculer α_1 ? Justifier.
   b- Soit $x_0 = 2$. Calculer les trois premières itérations en utilisant cette méthode.
3. On pose $G(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ et $I_2 = [0; 1]$.
   a- Montrer que $G(x) = 0$ admet une racine unique α_2 dans l'intervalle I_2.
   b- Écrire le processus itératif $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du point fixe défini par la fonction d'itération suivante : $\varphi(x) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x})$.
   c- Montrer que la méthode du point fixe converge à la racine α_2 sur I_2.
   d- Soit $\epsilon = 2^{-5}$. Calculer le nombre d'itérations nécessaires en partant de $x_0 = 0$.
4. Maintenant, on pose $H(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{d^2F(x)}{dx^2}$ et $I_3 = [-2; -1]$.
   a- Montrer que l'équation $H(x) = 0$ admet un zéro unique α_3 sur l'intervalle I_3.
   b- Soit $\epsilon = 5^{-4}$. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher, par la méthode de la Bissection, la racine α_3 située sur I_3.

Exercice 2 (05.00 points) :
On considère le système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\beta x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2\beta x_1 + 2x_2 + \frac{2}{\beta}x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 + \frac{2}{\beta}x_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Écrire le système (1) sous la forme matricielle $Ax = b$, avec $x = (x_1, x_2, x_3)^t$.
2. Pour quelles valeurs du paramètre réel β :
   a- La matrice A admet la décomposition LU.
   b- La matrice A admet la décomposition de Cholesky.

Exercice 3 (05.00 points) :
On considère le système d'équations linéaires $Ax = b$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les matrices de Jacobi (J) et de Gauss-Seidel (Gs) associées à A.
2. Comparer les deux méthodes.

Bon Courage

Corrigé de l'examen Maths06

ST2 - 2010.

Exo1 :

$$F(x) = 2x^2 - 3x - e^{-x}$$

1°/ $F(x)=0$ admet une racine unique α_1 sur I_1

- F est une fonction définie et continue sur I_1
- $\begin{cases} F(1) = 2 - 3 - e^{-1} = -(3-2+e^{-1}) = -(1+e^{-1}) < 0 \\ F(2) = 8 - 6 - e^{-2} = 2 - e^{-2} > 0 \end{cases}$

1

D'après le Th. V.I, $\exists$ aumoins une racine $\alpha_1 / F(\alpha_1)=0$.

- $\begin{cases} \text{L'unicité de la solution} \\ F'(x) = 4x - 3 + e^{-x} > 0, \ \forall x \in [1,2] \\ \text{alors } F \text{ est strictement croissante sur } I_1 \end{cases}$

Conclusion : $F(x)=0$ admet une racine unique α_1 sur I_1

2°/ a- Peut-On appliquer la méthode de Newton ?

Il suffit de vérifier les conditions d'application de théorème de Newton :

1,25

- 1 F est de classe C^2 sur $[1,2]$ car $\begin{cases} e^{-x} \text{ est } C^2(I_1) \\ x(2x-3) \text{ est } C^2(I_1) \end{cases}$
- 2 - $F(1) \times F(2) < 0$ (voir Q1)
- 3 - $F'(x) = 4x + e^{-x} - 3 > 0, \ \forall x \in I_1$
- 4 - $F''(x) = 4 - e^{-x} > 0, \ \forall x \in I_1$ (garde un signe cst)
- 5 - Pour $x_0 = 2$, on a $F(2) F''(2) > 0$.

Alors la méthode de Newton définie par $\begin{cases} x_0 = 2; \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \end{cases}$ converge vers la racine α_1 de $F(x)=0$. 0,25

2-b/ L'algorithme de Newton est donné par

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Dans notre Cas, il s'ecrit :

$$\begin{cases} x_0 = 2; \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{2x_n^2 - 3x_n - e^{-x_n}}{4x_n + e^{-x_n} - 3}, \quad k=0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

• Pour $n=0$,

$$x_1 = x_0 - \frac{2x_0^2 - 3x_0 - e^{-x_0}}{4x_0 + e^{-x_0} - 3} = 1,6369.$$ 0,5

• Pour $n=1$;

$$x_2 = x_1 - \frac{2x_1^2 - 3x_1 - e^{-x_1}}{4x_1 + e^{-x_1} - 3} = 1,5691.$$ 0,5

• Pour $n=2$;

$$x_3 = x_2 - \frac{2x_2^2 - 3x_2 - e^{-x_2}}{4x_2 + e^{-x_2} - 3} = 1,5666$$ 0,5

3°/ $G(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x) = 4x + e^{-x} - 3.$ 0,25

3-a/ $G(x) = 0$ admet une racine unique α_2 sur I_2

0,75

- $G(x)$ est fonction bien définie et Continue sur I_2
- $\begin{cases} G(0) = -2 < 0 \\ G(1) = 4 - 3 + e^{-1} = 1 + e^{-1} > 0 \end{cases}$

D'après le T.V.I, ∃ au moins une racine $\alpha_2 \in I_2 / G(\alpha_2) = 0$

. L'unicité de la solution

0,25 $\begin{cases} G'(x) = F''(x) = 4 - e^{-x} > 0, \quad \forall x \in I_2 = [0,1] \\ \text{alors } G(x) \text{ est strictement Croissante sur } I_2. \end{cases}$

Conclusion: $G(x) = 0$ admet une racine unique α_2 sur I_2.

3- b/ Le Processus itératif $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du point fixe s'écrit

0,5 $\begin{cases} x_0 \text{ donné}, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x_n}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$

3-C/ La Convergence de la méthode du Point-Fixe:

Il suffit de vérifier les Conditions de Théorème du point Fixe (voir le cours).

1

* $G(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) = 1/4(3 - e^{-x})$.

i * $\varphi(x)$ est 1 fonction bien définie et Continue sur I_2

ii * La stabilité:

* $\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{-x} > 0, \quad \forall x \in I_2 \Rightarrow \varphi \nearrow$

Alors: $\varphi(I_2) = \varphi([0,1]) = [\varphi(0), \varphi(1)]$

$= [\frac{1}{2}, 0{,}658] \subset [0,1]$

D'où: φ est stable.

iii/ Montrons que φ est Contractante:

$\exists! K,\ 0 < K < 1$, avec $k = \max_{I_2} |\varphi'(x)| \,/\, |\varphi'(x)| \leq K < 1$

On a :

- $\varphi'(x) = \frac{1}{4}e^{-x} > 0, \forall x \in I_2 \Rightarrow \varphi$ est Croissante
- $\varphi''(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} < 0, \forall x \in I_2 \Rightarrow \varphi'$ est décroissante

D'où : $k = \max_{I_2} |\varphi'(x)| = \varphi'(0) = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \varphi$ est Contractan

1) Alors la processus du point fixe défini par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné } (x_0 = 0), \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x_n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Converge vers l'unique solution α_2 /

3- d) La nombre d'iterations : $x_0 = 0$, $\varepsilon = 2^{-5}$.

$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = 1/2$, $\quad k = 1/4 = 0{,}25$.

$\varepsilon = 2^{-5} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$.

$$n > \frac{\ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right]}{\ln k} = \frac{\ln\left[\frac{0{,}75 \times 0{,}03125}{0{,}5}\right]}{\ln 0{,}25} = 2{,}2075$$

$\Rightarrow n = 3$ 0,5

0,25 4°/ $H(x) = F''(x) = 4 - e^{-x}$

4-a) Montrons que $H(x)=0$ admet un zéro unique sur I_3

1

* $H(x)$ est bien définie et Continue sur I_3.

$$\left\{\begin{array}{l} H(-2) = 4 - e^{2} < 0 \\ H(-1) = 4 - e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H(-1)H(-2) < 0.$$

D'après le TVI, $\exists$ au moins une racine $\alpha_3 / H(\alpha_3) = 0$

- L'unicité de la solution:

$H'(x) = e^{-x} > 0, \forall x \in I_3 \Rightarrow H$ est strictement croissante.

Finalement, on déduit que cette racine est unique

4-b) Le nombre d'itérations

$$n > \frac{\ln\left[\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right]}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln 625}{\ln 2} - 1 = 8{,}288$$

$\Rightarrow n = 9$ 0,5

Remarque:

$$\varepsilon = 5^{-4} = \frac{1}{625} = 0{,}0016$$

$$|b-a| = |-1+2| = 1.$$

Exo N° 2:

1°) Ecriture du système (1) sous forme $Ax=b$

0,5 (1) $\Longleftrightarrow$ $$\begin{bmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & 2/\beta \\ 2 & 2/\beta & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2°) Les valeurs du paramètre réel β:

2-a) A admet la décomposition LU.

Il suffit de verifier que $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1,2,3$

avec $\Delta_i = |A_{[i]}|$, $i = 1,2,3$.

Dans notre cas:

0,5 $\Delta_1 = |A_{[1]}| = |a_{11}| = 4 \neq 0$

0,5 $\Delta_2 = |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta \\ 2\beta & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4\beta^2 \neq 0 \Rightarrow \beta^2 \neq 2$

$\Rightarrow \beta \neq \mp 2.$

- $\Delta_3 = |A_{[3]}| = |A| = 4\left(8 - \frac{4}{\beta^2}\right) - 2\beta\left(8\beta - \frac{4}{\beta}\right) + 2(4-4)$

$= 40 - 16\beta^2 - \frac{16}{\beta^2}$

0,5 $= -\frac{8}{\beta^2}\left(2\beta^4 - 5\beta^2 + 2\right)$

$= -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 \neq 0 \\ \beta^2 \neq 1/2 \\ \beta^2 \neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta \neq 0;\ \beta \neq \mp\sqrt{1/2};\ \beta \neq \mp\sqrt{2}$

(P6)

2-b) A admet la décomposition de Cholesky
Il suffit de verifier que A est SDP.

0,5 • A est Symetrique car $A = A^t$ (i,e $a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j$).

• Pour que A soit Définie positive, il faut verifier que $\Delta_i > 0, \ \forall i = 1, 2, 3.$

0,5 — $\Delta_1 = |A_{[1]}| = 4 > 0$

0,5 — $\Delta_2 = |A_{[2]}| = 4(2-\beta^2) > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \beta < \sqrt{2}$

0,5 — $\Delta_3 = |A| = -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^2-1)(\beta^2-2) \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < \beta < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \beta < \sqrt{2} \end{cases}$

Pour que A soit S.Définie positive, il faut que :

A est SDP si $\beta \in \underbrace{\left]-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right[}$

1

EXO N° 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

1°) Etude de la convergence.

* Une méthode itérative converge $\Leftrightarrow \rho(H) < 1$

où, $H = J$ (ou bien G_s).

Pour cela, on pose :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E+F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} ; \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} , \quad (\det(D) \neq 0).$$

* La méthode de Jacobi

1

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3/10 & 0 & -3/10 \\ 0 & -\frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

0,5

$$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \frac{99}{100}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{99}{100}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = \mp \frac{\sqrt{99}}{10}$$

0,5

$$\rho(J) = \max(|\lambda_i|) = \max\left\{0, \frac{\sqrt{99}}{10}\right\} = \frac{\sqrt{99}}{10}$$

Conclusion : Comme $\rho(J) = \frac{\sqrt{99}}{10} < 1$ alors la méthode de Jacobi converge.

* La méthode de Gauss-Seidel

$$(D-E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

0,25 • $\det(D-E) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 100 \neq 0 \Rightarrow (D-E)^{-1}$ existe,

donc,

0,25 • $(D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1/10 & 0 \\ -9/100 & -3/100 & 1/10 \end{bmatrix}$

1 • $G_S = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9/10 & -3/10 \\ 0 & -27/100 & 9/100 \end{bmatrix}$

0,5 • $P_{G_S}(\lambda) = \det(G_S - \lambda I_3) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{99}{100}\lambda\right)$
$= -\lambda^2\left(\lambda - \frac{99}{100}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda_{2,3} = 0, \ \lambda_1 = \frac{99}{100}.$

0,5 • $\rho(G_S) = \max(|\lambda_i|) = \max\left\{0, \frac{99}{100}\right\} = \frac{99}{100}$

Conclusion: Comme $\rho(G_S) = \frac{99}{100} < 1$ alors La méthode de Gauss-seidel converge.

2°/ $\rho(G_S) = 0,99 < \rho(J) = 0,99499$, alors La méthode de Gauss-Seidel est La plus performante.

0,5