Cours de géométrie affine et euclidienne

Rabah Djabri
Université de Béjaia
Département de Recherche Opérationnelle

1[er] mai 2023

Table des matières

Introduction

Ce cours de géométrie est une introduction à la géométrie affine et euclidienne. Son objectif principal est l'introduction des concepts fondamentaux de la géométrie tels que : espace affine, application affine, espace euclidien, isométrie, etc. Ce qui permettra à l'étudiant d'avoir les outils mathématiques nécessaires pour l'acquisition et l'assimilation des connaissances dans le domaine de sa formation.

Le plan du cours est comme suit.

— **Chapitre 1** : Géométrie affine

1. Notion d' espace affine, exemples d'espaces affines
2. Notion de barycentre
3. Variétés affines, applications affines et formes affines
4. Droites et hyperplans
5. Translation, homothétie, symétrie.

— **Chapitre 2** : Espace affine euclidien

1. Structure d'espace euclidien, norme et angle, orthonormalisation de Gram-Schmidt
2. Sous-espaces orthogonaux (hyperplan orthogonal à une droite, distance d'un point à une droite, etc.)
3. Applications dans les espaces affines euclidiens : isométrie et similitude.

— **Chapitre 3** : Paramétrisation des courbes et surfaces

1. Courbe paramétrée
2. Etude locale des courbes planes
3. Etude locale des courbes gauches
4. Tracé des courbes paramétrées planes : courbes en coordonnées cartésiennes, courbes en coordonnées polaires
5. Exemples de courbes et surfaces

Chapitre 1

Rappels d'algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1 (La notion de corps). Un corps est un ensemble K muni de 2 opérations $(+)$ et $(\cdot)$ telles que :
A1) $\forall x, y \in K, \quad x + y \in K$;
A2) $\forall x, y \in K, \quad x + y = y + x$;
A3) $\forall x, y, z \in K, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;
A4) $\exists 0 \in K, \forall x \in K, \quad 0 + x = x$;
A5) $\forall x \in K, \exists (-x) \in K, \quad x + (-x) = 0$;
M1) $\forall x, y \in K, \quad xy \in K$;
M2) $\forall x, y \in K, \quad xy = yx$;
M3) $\forall x, y, z \in K, \quad (xy)z = x(yz)$;
M4) $\exists 1 \in K, 1 \neq 0, \forall x \in K, \quad 1x = x$;
M5) $\forall x \in K^*, \exists x^{-1} \in K, \quad xx^{-1} = 0$;
D) $\forall x, y, z \in K, \quad x(y + z) = (xy + xz)$.
On dit que $(K, +, \cdot)$ est un corps. D'une façon équivalente $(K, +, \cdot)$ est un corps si $(K, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et $(K^*, \cdot)$ est un groupe, ici $K^* = K - \{0\}$.

Exemples de corps :
$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres irrationnels.
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

Définition 2 (Espace vectoriel). Un K-espace vectoriel est un ensemble V muni de 2 opérations binaires :
$V \times V \to V, \ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$;
$K \times V \to V, \ (\alpha, \boldsymbol{v}) \mapsto \alpha \boldsymbol{v}$;

1. $\forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$;
2. $\forall \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$;
3. $\exists \ \mathbf{0} \in V, \forall \ \boldsymbol{v} \in V, \ \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$;
4. $\forall \ \boldsymbol{v} \in V, \ \exists \ (-\boldsymbol{v}) \in V, \ \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$;
5. $\forall \ \alpha, \beta \in K, \forall \ \boldsymbol{v} \in V, \alpha(\beta \boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$;
6. $\forall \ \boldsymbol{v} \in V, \ 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$;

7. $\forall\, \alpha \in K, \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$;
8. $\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, \boldsymbol{v} \in V, (\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$.

On dit que $(V, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.

Définition 3. Soit $(V, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel. Une partie $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de $(V, +, \cdot)$ ssi :

1. $\mathbf{0} \in W$.
2. $\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w} \in W$.

Soit $(V, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel. Soit S une partie de V. Le sous-espace vectoriel engendré par S est le plus petit sous-espace vectoriel contenant S. On le note $\mathrm{Vect}(S)$. Si $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, alors on écrit $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$.

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n :\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K\}.$$

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle\,.$$

Définition 4. Soit $(V, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel. On dit q'une famille $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ de vecteurs de V est une base de V ssi

1. $\mathcal{A}$ est linéairement indépendante
2. $V = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$.

Théorème 1 (Théorème d'existence d'une base). *Si un K-espace vectoriel V admet une famille génératrice finie, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ de V.*

Théorème 2 (Théorème de la base incomplète). *Si $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ est une famille libre, alors $\mathcal{A}$ peut être complétée pour obtenir une base de V.*

Théorème 3 (Théorème de la base extraite). *Si $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ est une famille génératrice de V, alors on en peut extraire une base de V.*

1.2 Applications linéaires

Définition 5. Soient V et W deux K-espaces vectoriels. Une application linéaire de V dans W est une application $f \colon V \to W$ telle que

1. $\forall\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V,\ f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$;
2. $\forall\, \lambda \in K,\ \forall\, \boldsymbol{v} \in V,\ f(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$.

L'ensemble des applications linéaires de V et W sera noté $\mathcal{L}(V, W)$.

Proposition 1. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de V.*
2. $\mathrm{im}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de W.*
3. *f est injective ssi* $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.
4. *f est surjective ssi* $\mathrm{im}\, f = W$.

Proposition 2. *Soit $f \colon V \to W$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ une base de V. Alors*

$$\mathrm{im}\, f = \langle f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle\,.$$

Le rang de f est $\mathrm{Rg}\, f = \dim \mathrm{im}\, f$.

Théorème 4 (Théorème du rang). *Soit $f \colon V \to W$ une application linéaire avec* $\dim V < +\infty$. *Alors*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{im}\, f.$$

1.3 Matrice associée à une application linéaire

Soient V et W deux K-espaces vctoriels, avec $\dim V$, $\dim W < \infty$.
Soient $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n)$ des bases de Vet W respectivement. Soit $f\colon V \to W$ une application linéaire. Alors f est uniquement déterminée par $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$. Si $\boldsymbol{v} \in V$, alors $\exists!$ $(x_1, x_2, \cdots, x_m)^t \in K^m$ tel que $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i$. On définit $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^t$.
La matrice de f par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la matrice A notée $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, et donnée par $[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$. On note aussi $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$.
Nous avons

$$[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [[f(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{B}}, [f(\boldsymbol{v}_2)]_{\mathcal{B}}, \cdots, [f(\boldsymbol{v}_m)]_{\mathcal{B}}].$$

Nous avons ce diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \Big\downarrow [\cdot]_{\mathcal{A}} & & \Big\downarrow [\cdot]_{\mathcal{B}} \\ K^m & \xrightarrow{[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}} & K^n \end{array} \tag{1.1}$$

Soit $f\colon V \to V$ une application linéaire. Soient $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ deux bases de V. La matrice de passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$ (la matrice de changement de base) notée $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ est définie par $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$. Comme $[\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{A}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$, alors

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Proposition 3. *Soient g, $h\colon V \to W$ et $f\colon W \to Z$ des applications linéaires ; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases des espaces vectoriels V, W, Z respectivement. Alors*

1. $[g+h]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} + [h]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;
2. $[\lambda g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda\,[g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;
3. $[f \circ g]_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$;
4. *Si g est inversible, alors* $[g^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = [g]^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Proposition 4. *Soit $f\colon V_\alpha \to V_\beta$ une application linéaire. Soient $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\alpha$ deux bases de V_α, et $\mathcal{A}_\beta, \mathcal{B}_\beta$ deux bases de V_β. Nous avons*

$$[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{A}_\beta} = [f]_{\mathcal{A}_\alpha,\mathcal{A}_\beta}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}_\alpha};$$

$$[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}_\beta} = [f]_{\mathcal{B}_\alpha,\mathcal{B}_\beta}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}_\alpha}.$$

Alors nous avons

$$[f]_{\mathcal{B}_\alpha,\mathcal{B}_\beta} = P^{-1}_{\mathcal{A}_\beta,\mathcal{B}_\beta}[f]_{\mathcal{A}_\alpha,\mathcal{A}_\beta} P_{\mathcal{A}_\alpha,\mathcal{B}_\alpha}. \tag{1.2}$$

Dans le cas $\alpha = \beta$, i.e. $V_\alpha = V_\beta$ et $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}$, alors

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}. \tag{1.3}$$

1.4 Matrices

Soit K un corps. Une matrice M de taille $m \times n$ est un tableau d'éléments de K qui possède m lignes et n colonnes. On peut écrire M comme

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Où

$$M = (a_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$$

1. Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de M.
2. Le coefficient a_{ij} est situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne.
3. Si $n = 1$, M est dite matrice colonne.
4. Si $m = 1$, M est dite matrice ligne.
5. Si $m = n$, M est dite matrice carrée.
6. On note par $M_{m\times n}(K)$ l'ensemble des matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans K.
7. On note par $M_n(K)$ l'ensemble des matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans K.
8. La matrice nulle de taille $m \times n$, notée $0_{m\times n}$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
9. Deux matrices sont égales ssi elles sont de même taille et les coefficients correspondents sont identiques.
10. Si $A, B \in M_{m\times n}(K)$, alors $A + B$ est la matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ dont les coefficients $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.
11. Si $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times p}(K)$ alors AB est la matrice $C \in M_{m\times p}(K)$ dont les coefficients $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$.
12. Si $A \in M_{m\times n}(K)$, alors αA, pour $\alpha \in K$, est la matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ dont les coefficients $C_{ij} = \alpha A_{ij}$.

1.5 Systèmes linéaires

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.4}$$

Où $a_{ij},\ b_i \in K$ pour tous $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\,;\ \ x_i$ sont des inconnues.
Le système peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Ou succintement $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$.
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Supposons que $\boldsymbol{x}_0$ est une solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, alors l'ensemble des solutions de S est $\mathrm{Sol} = \ker f + \boldsymbol{x}_0$.

Théorème 5. *Soit* Sol *l'ensemble des solutions du système linéaire* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Alors nous avons les possibilités suivantes :*

1. Sol *est vide.*

2. Sol *a un seul élément.*

3. Sol *est infini.*

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i,\ \lambda \neq 0$, multiplier une lingne par un scalaire non nul,
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j,\ \lambda \in K, i \neq j$, ajouter à une lingne le multiple d'une autre ligne,
3. $L_i \leftrightarrow L_j,$ permuter deux lignes.

Ici $L_1, L_2, \ldots, L_m$ sont les lignes de la matrice.

Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice sont :

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i,\ \lambda \neq 0$, multiplier une colonne par un scalaire non nul.
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j,\ \lambda \in K, i \neq j$, ajouter à une colonne le multiple d'une autre colonne.
3. $C_i \leftrightarrow C_j,$ permuter deux colonne.

Ici $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont les colonnes de la matrice.

Définition 6. Nous donnons les définitions suivantes :

1. Une matrice M est dite échelonnée en ligne si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croit strictement ligne après ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des lignes nulles.
2. Une matrice M est dite échelonnée réduite si elle est échelonnée et chaque pivot est ǵal à 1 et il est le seul coefficient non nul de sa colonne.
3. Le pivot est le premier coefficient non nul d'une ligne (leading coefficient).
4. Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, alors on écrit $A \sim B$.

Chapitre 2

Géométrie affine

2.1 Espaces affines

Définition 7. Considérons un K-espace vectoriel $\vec{E}$. On dit qu'un ensemble non vide E est un espace affine associé à $\vec{E}$ s'il existe une application

$$\varphi\colon E \times E \to \vec{E}$$

telle que :

A1 : $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ (la relation de Chasles) ;

A2 : $\varphi_A\colon E \to \vec{E}$ donnée par $\varphi_A(P) = \varphi(A, P)$ est une bijection pour tout $A \in E$.

Dorénavant on ?crira $\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\varphi(A, B)$. Alors A1 devient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On note un espace affine par $\left(E, \vec{E}, \varphi\right)$.

Définition 8. Nous donnons les définitions suivantes.

1. L'espace $\vec{E}$ est appelé la direction de l'espace affine E.
2. Sont appelés scalaires les éléments de K.
3. Sont appelés points les éléments de E.
4. La dimension de E est la dimension de $\vec{E}$.
5. Une droite (affine) est un espace affine de dimension 1.
6. Un plan (affine) est un espace affine de dimension 2.

Proposition 5. *Si E est un K-espace affine. Alors*

1. $\forall A \in E,\ \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ *;*

2. $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ *;*

3. $\forall A, B, C \in E,\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$*.*

2.1.1 Exemples d'espaces affines

1. Soit

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3)\colon (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 2\right\}$$

et
$$\vec{E} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \colon (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$
On définit $\varphi \colon E \times E \to \vec{E}$ par
$$\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

2. Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel, alors $\vec{E}$ est naturellement un espace affine en définissant $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{w} - \vec{v}$. C'est la structure d'espace affine canonique.

2.1.2 Vectorialisation d'un espace affine

L'application $\varphi_A \colon E \to \vec{E}$ donnée par $\varphi_A(P) = \varphi(A, P)$ est une bijection pour tout $A \in E$. Soit $\rho_A \colon \vec{E} \to E$ l'inverse de φ_A. On munit E d'une structure d'espace vectoriel comme suit : $P +_A Q = \rho_A(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ})$, et $\alpha ._A P = \rho_A(\alpha\overrightarrow{AP})$. Alors $(E, +_A, ._A)$ est un K-espace vectoriel qu'on va noter E_A. L'espace E_A est appelé le vectorialisé de E en A. Alors E et E_A sont isomorphes comme espaces vectoriels.

2.2 Sous-espaces affines

Définition 9 (Sous-espace affine). Soit E un espace affine. On dit qu'une partie W de E est un sous-espace affine de E si W est de la forme
$$W = A + \vec{V} = \left\{A + \vec{v},\ \vec{v} \in \vec{V}\right\}$$
pour quelque point $A \in E$ et quelque sous-espace vecoriel $\vec{V}$ de $\vec{E}$. Le sous-espace affine W sera noté $\mathrm{Aff}(A, \vec{V})$. Alors on peut voir que W est un espace affine de direction $\vec{V}$.

Définition 10. Soit X une partie non vide d'un espace affine E. Le sous-espace affine engendré par X est le plus petit sous-espace affine de E qui contienne X, ou c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant X On le note $\mathrm{Aff}\, X$.

Proposition 6. *Nous avons*

1. *Si X est un sous-espace affine de E, alors* $\mathrm{Aff}\, X = X$.
2. *Si $X \subset Y$ alors* $\mathrm{Aff}\, X \subset \mathrm{Aff}\, Y$.
3. $\overrightarrow{\mathrm{Aff}\, X} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{MN}; M, N \in X\}$.
4. $\overrightarrow{\mathrm{Aff}\, X} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AN}; N \in X\}$, *pour quelque $A \in X$.*
5. $\mathrm{Aff}\, X = A + \overrightarrow{\mathrm{Aff}\, X}$, *avec $A \in X$.*
6. *Si X_1 et X_2 sont deux sous-espaces affines, et $A \in X_1$, $B \in X_2$, alors* $\mathrm{Aff}(X_1 \cup X_2) = A + (\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + K\overrightarrow{AB})$.
7. *Si $X = \{A_0, A_1, \cdots, A_m\}$, alors* $\mathrm{Aff}\, X = A_0 + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$.

Nous donnons les définitions suivantes :

1. Deux sous-espaces affines F et G sont dits parallèles ssi $\vec{F} = \vec{G}$.
2. Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.
3. Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
4. On note une droite (affine) qui passe par un point A, de direction $K\vec{u}$ par $D(A, \vec{v})$.
5. On note un plan (affine) qui passe par un point A, de direction $K\vec{u} + K\vec{v}$ par $P(A, \vec{u}, \vec{v})$.

2.3 Barycentre

Définition 11. Soit E un K-espace affine. Un système de points pondérés est une famille

$$\{(A_i, \alpha_i), i = \overline{1, n}\},$$

où les A_i sont des points de E, et $\alpha_i \in K$. α_i est appelé poids (ou masse, ou coefficient) de A_i. Soit la fonction $f\colon E \to \vec{E}$ donnée par

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

La fonction f est appelée *la fonction vectorielle de Leibnitz* associée à $\{(A_i, \alpha_i), i = \overline{1, n}\}$.
Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $f(G) = \vec{0}$. Le point G s'appelle *le barycentre* du système de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i), i = \overline{1, n}\}$. En particulier si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, le barycentre s'appelle l'isobarycentre. On écrit $G = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i), i = \overline{1, n}\}$.

2.4 Applications affines

Définition 12 (Application affine). Soit E et F deux espaces affines. Supposons qu'il existe une application $f\colon E \to F$ et une application linéaire $h\colon \vec{E} \to \vec{F}$.

$$\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB}).$$

Alors on dit que f est une application affine de E dans F. La condition précédente est équivalente ?

$$\forall A \in E,\ \forall \vec{v} \in \vec{E},\ f(A + \vec{v}) = f(A) + h(\vec{v}).$$

C'est-à-dire le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\varphi} & \vec{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f,f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ F \times F & \xrightarrow{\varphi'} & \vec{F} \end{array} \tag{2.1}$$

1. L'application h est appelée la partie linéaire de f, et on la note souvent $\vec{f}$.
2. Une application affine est appelée aussi morphisme affine.
3. On note l'ensemble des applications affines de E dans F par $\mathrm{A}(E, F)$.
4. Si $f \in \mathrm{A}(E, E)$, alors f est dite endomorphisme affine de E.
5. Si $f \in \mathrm{A}(E, F)$, et f est bijective, alors on dit que f est un isomorphisme affine, ou une transformation affine.
6. Si $f \in \mathrm{A}(E, E)$, et f est bijective, alors on dit que f est un automorphisme affine.
7. On note l'ensemble des endomorphismes affines de E par $\mathrm{A}(E)$.
8. On note l'ensemble des automorphismes affines de E par $\mathrm{GA}(E)$.

2.4.1 Translation

Définition 13. Soit E un K-espace affine. La translation de vecteur $\vec{v}$ est l'pplication affine $T_{\vec{v}} \colon E \to E$ donnée par

$$T_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v}.$$

La composition de deux translations est une translation $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}+\vec{v}}$. La translation de vecteur nul $T_{\vec{0}}$ est l'identité. La composition est commutative.

2.4.2 Homothétie

Définition 14. Soit E un K-espace affine. l'homothétie de centre I et de rapport α est l'application affine $h_{I,\alpha} \colon E \to E$ donnée par

$$h_{I,\alpha}(M) = I + \alpha\overrightarrow{IM}.$$

L'homothétie $h_{I,-1}$ s'appelle symétrie centrale de centre I.

Lemme 1. *Soit $h : E \longrightarrow E$ une application telle que $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM}$ pour tous points A et M où $A' = h(A)$ et $M' = h(M)$. Alors*

1. *si $\lambda = 1$, alors h est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$,*
2. *si $\lambda \neq 1$, alors h est une homothétie de centre $O = A + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AA'}$ et de rapport λ.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM} &\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = \lambda(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \\
&\iff \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} - \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} \\
&\iff \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM} + (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'}.
\end{aligned}$$

Alors si $\lambda = 1$, nous avons $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ pour tout M ; ce qui veut dire qiue h est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Si $\lambda \neq 1$, on choisit O tel que $(1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$, i.e.

$$O = A + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AA'}$$

Dans ce cas h est une homothétie de centre $O = A + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AA'}$ et de rapport λ. □

Considérons les homothéties $h_{I,\alpha}$ et $h_2 = h_{J,\beta}$ de centres I et J et de rapports α et β respectivement ; et soit $h_1 = h_{I,\alpha}$ et $h_2 = h_{J,\beta}$. Si $h(M) = M''$ et $h(N) = N''$, alors

$$\overrightarrow{M''N''} = \alpha\beta\overrightarrow{MN}.$$

Nous avons $\overrightarrow{IJ''} = \alpha\overrightarrow{IJ}$, i.e.

$$\overrightarrow{JJ''} = (\alpha - 1)\overrightarrow{IJ}.$$

D'après le lemme précédent si $\alpha\beta = 1$, alors h est une translation de vecteur $\overrightarrow{JJ''} = (\alpha-1)\overrightarrow{IJ}$. Si $\alpha\beta \neq 1$, alors

$$J + \frac{1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{JJ''} = J + \frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{IJ}.$$

Dans ce cas h est une homothétie de centre $J + \frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{IJ}$ et de rapport $\alpha\beta$.

2.4.3 Projection affine

Soit E un espace affine et F un sous-espace affine de E. Soit $\vec{G}$ un supplémentaire de $\vec{F}$, i. e. , $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$. La projection sur F parallèlement à $\vec{G}$ est l'application affine qui associe à chaque point M de E le point $M' = F \cap G_M$, avec $G_M = M + \vec{G}$.
On écrit

$$\mathrm{pr}\colon E \to E$$

$$\mathrm{pr}(M) = F \cap G_M.$$

2.4.4 Affinité

L'affinité d'axe F, de direction $\vec{G}$ et de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$, est l'application affine qui associe à chaque point M de E le point M'' tel que $\overrightarrow{M'M''} = \alpha\overrightarrow{M'M}$, où $M' = \mathrm{pr}(M)$.
Symétrie axiale : L'affinité d'axe F, de direction $\vec{G}$ et de rapport -1 est appelée symétrie d'axe F et de direction G.

2.5 Repère cartésien d'un espace affine

Un repère cartésien d'un espace affine E est un couple $\mathcal{R} = (O, B)$, où $O \in E$ et B est une base de $\vec{E}$. Si M est un point de E, alors il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K^n$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

On dit que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les coordonées cartésiennes du point M dans $\mathcal{R}$, et on écrit $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pour un vecteur $\vec{v} \in \vec{E}$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K^n$ tel que

$$\overrightarrow{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

On dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les composantes de $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, et on écrit $\vec{v}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

2.6 Représentation paramétrique d'un sous-espace affine

Soit $\mathrm{Aff}(A, \vec{F})$ un sous-espace affine d'un espace affine E, et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ une base de $\vec{F}$. Alors $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ est un repère cartésien de $\mathrm{Aff}(A, \vec{F})$. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de E, $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$, et $A(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Alors $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{Aff}(A, \vec{F})$ si et seulement si il existe un k-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in K^k$ tel que

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_k + b_1; \\ x_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_k + b_2; \\ . \\ . \\ . \\ x_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nk}\alpha_k + b_n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ce système d'équations s'appelle représentation paramétrique du sous-espace affine $\mathrm{Aff}(A, \vec{F})$.

2.7 Equation cartésienne d'un hyperplan

Soit E un espace affine muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit $(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1})$ un repère cartésien de l'hyperplan H. Alors $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$ si et seulement si $\det_B(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \overrightarrow{AM}) = 0$, où $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Il existe un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tel que $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$ si et seulement si

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0.$$

Chapitre 3

Espaces affines euclidiens

3.1 Espaces affines euclidiens

Définition 15. Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\vec{E}$ est une application bilinéaire symétrique et définie-positive $\langle .\,,.\rangle\colon \vec{E}\times\vec{E}\to\mathbb{R}$, i.e.

1. $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall\,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\vec{E},\ \langle\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}\rangle=\alpha\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\beta\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$,
2. $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in\vec{E},\ \langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$,
3. $\forall\,\vec{x}\in\vec{E},\ \langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geq 0$, et $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0$ ssi $\vec{x}=\vec{0}$.

Dans ce cas $\Big(\vec{E},\langle .\,,.\rangle\Big)$ est appelé un espce préhilbertien.

Si $\vec{E}$ est de dimension finie $\vec{E}$ est appelé espace vectoriel euclidien, et dans ce cas la norme sur $\vec{E}$ donnée par $\|\vec{x}\|=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}$ est appelée la norme euclidienne associée au produit scalaire, et la distance sur $\vec{E}$ donnée par $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{y}-\vec{x}\|$ est appelée la distance euclidienne associée au produit scalaire.

Proposition 7. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $\|\vec{x}\|\geq 0,\ \vec{x}\|=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}.$
2. $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\leq\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ *(Inégalité de Cauchy-Schwartz).*
3. $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ *(Inégalité triangulaire).*
4. $\|\lambda\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|.$

Proposition 8. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\langle\vec{x},\vec{y}\rangle.$
2. $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=4\langle\vec{x},\vec{y}\rangle.$
3. $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2)$ *(Identité du parallélogramme).*

Définition 16. Soit E un espace affine. Alors on dit que E est un espace affine euclidien si sa direction $\vec{E}$ est un espace vectoriel euclidien.

Une métrique sur E est donnée par $d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|$.

Proposition 9. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. $d(A,B)\geq 0,\quad d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$ *;*

2. $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$ *;*

3. $d(A,B) = d(B,A)$.

Nous donnons les définitions suivantes :

1. Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dits orthogonaux si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$; et on écrit $\vec{x} \perp \vec{y}$.
2. Soit $\vec{V} \subset \vec{E}$, alors l'orthogonal de $\vec{V}$, noté $\vec{V}^{\perp}$, est défini par
$$\vec{V}^{\perp} = \left\{ w \in \vec{E} \colon \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \, \forall \vec{v} \in \vec{V} \right\}.$$
3. Deux parties $\vec{V}, \vec{W} \subset \vec{E}$ sont dites orthogonales ssi $\forall \vec{v} \in \vec{V}$, $\forall \vec{w} \in \vec{W}$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. On écrit $\vec{V} \perp \vec{W}$.
4. On dit qu'une famille de vecteurs $(\vec{v}_i)_{i=1}^{n}$ est orthogonale si pour tous $i \neq j$, on a $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$.
5. On dit qu'une famille de vecteurs $(\vec{v}_i)_{i=1}^{n}$ est orthononormale si $(\vec{v}_i)_{i=1}^{n}$ est orthogonale et $\|\vec{v}_i\| = 1$ pour tout i.
6. Deux sous-espaces affines F et G d'un espace euclidien E sont dits orthogonaux ssi $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont orthogonaux. On écrit $\vec{F} \perp \vec{G}$.
7. Un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ d'un espace affine euclidien E est dit orthogonal ssi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthogonale de $\vec{E}$; i.e. $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.
8. Un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ d'un espace affine euclidien E est dit orthonormal ssi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormale de $\vec{E}$. i.e. la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est orthogonale et les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ sont unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$ pour tout i).
9. On dit qu'une application linéaire $f \colon \vec{E} \to \vec{E}$ est une isométrie ssi $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$: $\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
10. On dit qu'une application affine $f \colon E \to E$ est une isométrie ssi $\forall\, A, B \in E$: $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$.
11.
12. On dit qu'une application affine $f \colon E \to E$ est une similitude de rapport $k > 0$ ssi $\forall\, A, B \in E$: $d(f(A), f(B)) = kd(A,B)$.
13. Projection orthogonale : Soient E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E. Si $E = \vec{F} \oplus \vec{G}$ et $E = \vec{F} \perp \vec{G}$., alors la projection sur F parallèlement ? $\vec{G}$ est appelée projection orthogonale sur F.
14. Soit un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Si $\vec{v}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\vec{w}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, alors $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Proposition 10. *Nous avons :*

1. $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ *(Théorème de Pythagore).*

2. $\vec{V}, \vec{W} \subset \vec{E}$, *alors* $\vec{V}^{\perp} \supset \vec{W}^{\perp}$.

3. $\vec{V}^{\perp} = \mathrm{Vect}(\vec{V})^{\perp}$.

4. $\vec{V} \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V} \subset \vec{W}^{\perp}$.

3.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 17 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit $\mathcal{A} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs indépenadants de $\vec{E}$.
On définit

$$\mathrm{pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

On définit inductivement $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$:
$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ et pour $k = 2, 3, \ldots, n$ par

$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{pr}_{\vec{v}_i}(\vec{u}_k).$$

$$\vec{v}_k = \vec{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_i, \vec{u}_k \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2} (\vec{v}_i).$$

Alors $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ est une famille orthogonale et

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n).$$

En normalisant $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$, on obtient la famille orthonormale $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, avec

$$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n).$$

3.3 Hyperplan orthogonal à une droite

Soit E un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit D une droite de direction $\vec{n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, H l'hyperplan qui passe par le point $A(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et qui est orthogonal à $\vec{n}$. Alors $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$ ssi $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$; i.e.

$$a_1(x_1 - b_1) + a_2(x_2 - b_2) + \cdots + a_n(x_n - b_n) = 0. \tag{3.1}$$

3.4 Distance d'un point à un hypeplan

L'espace euclidien E de dimension n est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Soit H l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, et P un point arbitraire de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Alors la distance du point P à l'hyperplan H est donnée par

$$d(P, H) = \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Si $\vec{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, alors $M \in H$ si et seulement si
$\langle \overrightarrow{OM}, \vec{n} \rangle + b = 0$.

Comme le vecteur $\vec{n}$ est normal à H, alors $|\langle\overrightarrow{PM}, \vec{n}\rangle| = \|\overrightarrow{PM}\|\|\vec{n}\|$, ce qui veut dire

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{PM}\| &= \frac{|\langle\overrightarrow{PM}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|\langle\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|\langle\overrightarrow{OM}, \vec{n}\rangle - \langle\overrightarrow{OP}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|\langle\overrightarrow{OM}, \vec{n}\rangle + b|}{\|\vec{n}\|} \\
&= \frac{|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}.
\end{aligned}$$

□

3.5 Distance d'un point à une droite

Si $D(B, \vec{v})$ est une droite passant par le point B et de direction $\vec{v}$, $\|\vec{v}\| = 1$, dans un espace affine euclidien E, et A un point de E, alors

$$d(A, D) = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle\overrightarrow{AB}, \vec{v}\rangle^2}. \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit P la projection orthogonale de A sur $D(Q, \vec{v})$. Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} + \alpha\vec{v}$, avec $\alpha = \langle\overrightarrow{AB}, \vec{v}\rangle$, et donc $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \langle\overrightarrow{AB}, \vec{v}\rangle\vec{v}$. Alors

$$d(A, D) = \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle\overrightarrow{AB}, \vec{v}\rangle^2}.$$

□

Annexe A

Travaux dirigés

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2
Module : Géométrie
Année universitaire : 22/23

<u>Série de TD N° 1</u>

Exercice 1. Prouver les propriétés suivantes :
$\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B.$
$\forall A, B, C, D \in E,\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
Si $A + \vec{u} = A + \vec{v}$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

Exercice 2. On définit $A + \vec{v} := \rho_A(\vec{v})$, et $B - A := \overrightarrow{AB}$. Prouver les propriétés suivantes :

1. $\rho_A(\overrightarrow{AP}) = P$; i. e. $A + \overrightarrow{AP} = P$.
2. $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.
3. $\overrightarrow{(A + \vec{u})(B + \vec{v})} = \overrightarrow{AB} + \vec{v} - \vec{u}$.
4. $(B + \vec{v}) - (A + \vec{u}) = B - A + \vec{v} - \vec{u}$.
5. $E = A + \vec{E}$ pour tout $A \in E$.

Exercice 3.
Prouver que

$$\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB})$$

et

$$\forall A \in E,\ \forall \vec{v} \in \vec{E},\ f(A + \vec{v}) = f(A) + h(\vec{v}).$$

sont équivalentes.

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2
Module : Géométrie
Année universitaire : 22/23

Série de TD N° 2

Exercice 1. Soient A, B, C, D quatre points d'un espace affine réel, $m \in \mathbb{R}^*$ et I, J les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. Soit G_m le barycentre des points pondérés

$$\{(A, 1), (B, 1), (C; m-2), (D, m)\}.$$

1. Déterminer les points G_1 et G_2.
2. Prouver que G_2 est le milieu de $[G_1, J]$.
3. Prouver que $\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$.
4. Montrer que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant.

Exercice 2. L'espace affine réel de dimension 3 est muni d'un repère cartésien. On considère les vecteurs indépendants $\vec{u}(1, -2, 1)$, $\vec{v}(-1, 1, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 1)$ et les points $A(0, -1, 2)$, $M(1, -2, 3)$.

1. Montrer que A est sur le plan $P(O, \vec{u}, \vec{v})$.
2. Donner les coordonnées de la projection du point M sur $D(O, \vec{w})$, parallèlement à $P(O, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme sommes de deux vecteurs, l'un appartenant à $\overrightarrow{D(O, \vec{w})}$ et l'autre appartenant à $\overrightarrow{P(O, \vec{u}, \vec{v})}$.

Exercice 3. Considérons l'espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien.

1. Ecrire l'équation du plan passant par le point $B(0, 1, 0)$ et parallèle au plan d'équation $x + y - z + 3 = 0$.
2. On note D la droite d'ąuations $x + y - z + 3 = 0$, $2x + z - 2 = 0$. Donner l'équation du plan P contenant D et passant par le point $C(1, 1, 1)$.

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2
Module : Géométrie
Année universitaire : 22/23

Série de TD N° 3

Exercice 1. Considérons l'espace affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé. Détérminer une base orthonormée de l'espace $\vec{F} = \text{Vect}\{(0,1,2,2),(0,1,0,1),(0,0,-1,1)\}$.

Exercice 2. Soit D l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 2$ et $2x - 3y + z = 3$. Déterminer la distance à D du point $A(1,-1,1)$.

Exercice 3. Considérons le plan affine réel rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner l'expression en coordonnées des applications affines suivantes :

1. la symétrie centrale de centre $A(a, b)$,
2. l'affinité de base la droite d'équation $x - y - 1 = 0$, de direction $\vec{v}(2,1)$ et de rapport μ,
3. la symétrie par rapport à la droite d'équation $x - y - 1 = 0$, dans la direction du vecteur $\vec{v}(2,1)$.

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2
Module : Géométrie
Année universitaire : 22/23

Série de TD supplémentaire

Exercice 1.
Prouver que
$$\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB})$$
et
$$\exists O \in E, \forall B \in E,\ \overrightarrow{f(O)f(B)} = h(\overrightarrow{OB})$$
sont équivalentes.

Exercice 2.
Prouver que $\left\{A + \vec{v},\ \vec{v} \in \vec{V}\right\} = \left\{P \colon P \in E,\ \overrightarrow{AP} \in \vec{V}\right\}$, où $A \in E$ et $\vec{V}$ est un sous-espace vecoriel de $\vec{E}$.

Exercice 3. L'espace affine réel E de dimension 3 est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons P le plan d'équation $2x - 3y + 8z - 4 = 0$ et $\vec{D}$ la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

1. Donner l'expression en coordonnées de la projection sur P dans la direction $\vec{D}$.
2. Donner l'affinité de base P, de direction $\vec{D}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.

Annexe B

Examens corrigés

Université de Béjaia 12 octobre 2021
Département de RO
Niveau : Licence 2 PN
Année acad ?mique : 20/21
Durée : 1 h 30

Examen de rattrapage de géométrie affine et euclidienne

Exercice 1. (12 pts) Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,-2)$ et $C(4,1,2)$ trois points dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit G_α le barycentre des points pondérés

$$\{(A,\alpha-1),(B,2),(C,1)\},$$

où α est un paramétre réel différent de -2.

1. Déterminer les coordonnées du point J milieu de $[A,B]$.
2. Calculer $\langle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle$, $\|\overrightarrow{AB}\|$.
3. Déterminer les coordonnées de G_0 et de G_1.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$.
6. Déterminer l'intersection du plan d'équation $x-y+z=2$ et de la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$.
7. Déterminer la projection orthogonale du point B sur la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$.
8. Calculer la distance du point B à la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$.

Exercice 2. (08 pts) Soient D la droite d'équation cartésienne $2x+y+1=0$ dans l'espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $\vec{v}$ le vecteur donné par $\vec{v}=-\vec{i}-\vec{j}$.

1. Donner l'expression en coordonnées de l'homothétie h de centre $I(1,-2)$ et de rapport 3.
2. Déterminer l'image du point $M(0,1)$ par h.
3. Donner l'expression en coordonnées de la projection sur D dans la direction $\vec{v}$.
4. Donner l'expression en coordonnées de l'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport 3.
5. Déterminer $\vec{f}$.

Corrigé de l'examen de rattrapage de géométrie affine et euclidienne

Exercice 1. Les points sont répartis comme suit : $[1]+[2]+[2]+[1]+[1,5]+[1,5]+[1,5]+[1,5]$.

1. Le point J est le milieu de $[A,B]$, alors $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, ce qui veut dire

$$\begin{cases} x_J = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = 0, \\ y_J = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 1, \\ z_J = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Alors

$$J\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

2. Nous avons $\overrightarrow{AB}(-2,2,-3)$ et $\overrightarrow{BC} = (5,-1,4)$, alors

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = ((-2)\times 5) + (2 \times (-1)) + ((-3)\times 4) = -24,$$

et

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}.$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}(\alpha-1)\overrightarrow{G_\alpha A} + 2\overrightarrow{G_\alpha B} + \overrightarrow{G_\alpha C} &= (\alpha-1)\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG_\alpha}\right) + 2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG_\alpha}\right) + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG_\alpha}\right) \\ &= (\alpha-1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - (\alpha+2)\,\overrightarrow{OG_\alpha}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} G_\alpha = \mathrm{Bar}\{(A,\alpha-1),(B,2),(C,1)\} &\Leftrightarrow (\alpha-1)\overrightarrow{G_\alpha A} + 2\overrightarrow{G_\alpha B} + \overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha-1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - (\alpha+2)\,\overrightarrow{OG_\alpha} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\alpha+2)\,\overrightarrow{OG_\alpha} = (\alpha-1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OG_\alpha} = \frac{1}{\alpha+2}\left((\alpha-1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).\end{aligned}$$

Alors

$$G_\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}, \frac{5}{\alpha+2}, \frac{\alpha-3}{\alpha+2}\right).$$

Alors

$$G_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right),$$

et

$$G_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right).$$

4. Nous avons
$$\begin{aligned} -\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} &= -\left(\overrightarrow{G_0A}-\overrightarrow{G_0M}\right)+2\left(\overrightarrow{G_0B}-\overrightarrow{G_0M}\right)+\left(\overrightarrow{G_0C}-\overrightarrow{G_0M}\right)\\ &= 2\overrightarrow{G_0M}+\left(-\overrightarrow{G_0A}+2\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}\right)\\ &= 2\overrightarrow{G_0M}. \end{aligned}$$
Alors
$$\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{G_0M}\|=\frac{1}{2}.$$
Donc l'ensemble des points M tels que $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$ est la sphère de centre G_0 et de rayon $\frac{1}{2}$.
5. Nous avons
$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in D(A,\overrightarrow{AC}) &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}\\ &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x-1\\ y\\ z-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=3\lambda+3,\\ y=\lambda,\\ z=\lambda+1.\end{cases} \end{aligned}$$
6. Soit H le plan d'équation $x-y+z=2$. Remplaçant x,y et z dans l'équation $x-y+z=2$, nous aurons $3\lambda+2=2$, ce qui veut dire $\lambda=0$. Alors le point $A(1,0,1)$ est l'intersection de H et $D(A,\overrightarrow{AC})$.
7. Soit N la projection orthogonale de B sur la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$. Alors nous avons
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\\ &= \alpha\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{NB}. \end{aligned}$$
Alors
$$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\alpha\|\overrightarrow{AC}\|^2+\langle\overrightarrow{NB},\overrightarrow{AC}\rangle$$
Ce qui veut dire
$$\alpha=\frac{\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}=\frac{-7}{11}.$$
Comme $\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\frac{-7}{11}\overrightarrow{AC}$.
Alors
$$N\left(\frac{-10}{11},\frac{-7}{11},\frac{4}{11}\right).$$
8. Soit $\mathrm{d}\,(B,D)$ la distance du point B à la droite $D(A,\overrightarrow{AC})$.
Alors
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(B,D) &= \|\overrightarrow{BN}\|\\ &= \sqrt{\frac{1+29^2+26^2}{11^2}}\\ &= \frac{\sqrt{1518}}{11}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Les points sont répartis comme suit : $[1,5]+[1]+[2]+[2]+[1,5]$.

1. Soit M' l'image du point M par l'homothétie h de centre $I(1,-2)$ et de rapport 3.
   Alors
   $$\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}.$$
   Ce qui veut dire
   $$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y'+2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}.$$
   Donc
   $$\begin{cases} x' = 3x-2, \\ y' = 3y+4. \end{cases} \tag{B.1}$$
2. Remplaçant dans l'équation précédente on aura :
   $$M(0,1) \to M'(-2,7).$$
3. Nous avons $D = D(J,\vec{u})$, où $J(0,-1)$ et $\vec{u}(1,-2)$.
   Soit $M'\,(x',y')$ la projection de $M(x,y)$ sur D dans la direction $\vec{v}$.
   Alors
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{JM} &= \overrightarrow{JM'} + \overrightarrow{M'M} \\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}. \end{aligned}$$
   Alors
   $$\begin{cases} x = \alpha - \beta, \\ y = -2\alpha - \beta - 1. \end{cases}$$
   Alors
   $$\alpha = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}.$$
   Comme $\overrightarrow{JM'} = \alpha\vec{u}$, alors
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y'+1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$
   C'est-à-dire
   $$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}, \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}. \end{cases}$$
4. Soit $M''\,(x'',y'')$ l'image de $M(x,y)$ par l'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport 3.
   Alors $\overrightarrow{M'M''} = 3\overrightarrow{M'M}$; ce qui veut dire $\overrightarrow{OM''} = 3\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OM'}$.
   Alors
   $$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
   Alors
   $$\begin{cases} x'' = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}, \\ y'' = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}. \end{cases}$$
5. Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ l'application $\vec{f}$ est donnée par
   $$\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2 PN
Année académique : 21/22

1 juin 2022
Durée : 1 h 30

Les calculatrices sont strictement interdites.

Examen de géométrie affine et euclidienne

Exercice 1. (8 pts)
Soient $A(1,0,2)$, $B(-1,0,4)$ et $C(0,1,0)$ trois points dans un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Trouver le point H tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite affine $D(A,\overrightarrow{AB})$.
3. Déterminer les coordonnées du point S tel que
$$S = \mathrm{Bar}\{(A,1),\ (B,-5),\ (C,6)\}.$$
4. Soit P le plan affine d'équation cartésienne $x-2y+z=1$. Déterminer $\vec{P}$.

Exercice 2. (06 pts)
Soit D la droite qui passe les points $A(1,0,2)$ et $B(2,1,3)$ d'un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Déterminer la projection orthogonale du point $H(3\mu,1,-1)$ sur D, $(\mu \in \mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{d}(H,D)$, la distance de H à la droite D, en fonction de μ.
3. Déterminer μ si $\mathrm{d}(H,D) = \sqrt{14}$.

Exercice 3. (06 pts)
Un espace affine réel de dimension 2 est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Soit T la translation de vecteur $\vec{v}(1,2)$, et H l'homothétie de centre $I(0,1)$ et de rapport λ, $(\lambda \in \mathbb{R})$.

1. Exprimer en coordonnées l'application $T \circ H$.
2. Pour quelles valeurs de λ, l'application $T \circ H$ est-elle une homothétie ?
3. Dans ce cas déterminer son centre et son rapport.

<u>**Corrigé de l'examen de géométrie affine et euclidienne**</u>

Exercice 1. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2)+(2)+(2).

1. Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} &\iff \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \\ &\iff 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} \\ &\iff \overrightarrow{OH} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &\iff H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1). \end{aligned} \tag{B.3}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in D(A, \overrightarrow{AB}) &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \alpha \overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha(-2,0,2) + (1,0,2) \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = -2\alpha + 1, \\ y = 0, \\ z = 2\alpha + 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{B.4}$$

3. Nous avons en général

$$\begin{aligned} S = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i) : i = 1, \dots, n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{SA_i} = \vec{0} \\ &\iff \sum_1^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OS}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OS} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Alors

$$\begin{aligned} S = \mathrm{Bar}\{(A,1),\ (B,-5),\ (C,6)\} &\iff \overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC}}{2} \\ &\iff S\left(\frac{(1,0,2) - 5(-1,0,4) + 6(0,1,0)}{2}\right) \\ &\iff S(3,3,-9). \end{aligned} \tag{B.6}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P &\iff x - 2y + z = 1 \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = 2\alpha - \beta + 1, \quad y = \alpha, \quad z = \beta \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y,z) = (2\alpha - \beta + 1, \alpha, \beta) \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(-1,0,1) + (1,0,0). \\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{GM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad (\text{où} \quad G(1,0,0),\ \vec{u}(2,1,0),\ \vec{v}(-1,0,1)) \\ &\iff M \in P(G, \vec{u}, \vec{v}). \end{aligned} \tag{B.7}$$

Alors

$$\vec{P} = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}. \tag{B.8}$$

Exercice 2. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2)+(2).

1. Soit H' la projection orthogonale de H sur $D = D(A, \overrightarrow{AB})$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AH'} + \overrightarrow{H'H} \\ &= \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{H'H}.\end{aligned} \tag{B.9}$$

   Alors

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\rangle &= \alpha\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \langle\overrightarrow{H'H}, \overrightarrow{AB}\rangle \\ &= \alpha\|\overrightarrow{AB}\|^2 \quad (\text{car} \quad \overrightarrow{H'H} \perp \overrightarrow{AB}).\end{aligned} \tag{B.10}$$

   Alors

$$\alpha = \frac{\langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}. \tag{B.11}$$

   Et comme $\overrightarrow{AH'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH'} &= \overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{\langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\overrightarrow{AB}\end{aligned} \tag{B.12}$$

   Comme $\overrightarrow{AH}(3\mu - 1, 1, -3)$, $\quad \overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$, $\quad \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 3$, $\quad \langle\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\rangle = 3\mu - 3$, alors

$$H'(\mu, \mu - 1, \mu + 1). \tag{B.13}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(H, D) &= \|\overrightarrow{HH'}\| \\ &= \sqrt{(-2\mu)^2 + (\mu - 2)^2 + (\mu + 2)^2} \\ &= \sqrt{6\mu^2 + 8}.\end{aligned} \tag{B.14}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(H, D) = \sqrt{14} &\iff \sqrt{6\mu^2 + 8} = \sqrt{14} \\ &\iff \mu^2 = 1 \\ &\iff \mu \in \{-1, 1\}.\end{aligned} \tag{B.15}$$

Exercice 3. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2)+(2).

1. Soit $H(M) = M'$ et $T(M') = M''$, $M(x,y)$, $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')$. Alors

$$\begin{aligned}
(T \circ H)(M) = M'' &\iff T(M') = M'' \\
&\iff \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \\
&\iff \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{OI} + \vec{v} \\
&\iff \overrightarrow{OM''} = \lambda\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{OI} + \vec{v} \\
&\iff \overrightarrow{OM''} = \lambda\overrightarrow{OM} + (1-\lambda)\overrightarrow{OI} + \vec{v} \\
&\iff \begin{cases} x'' = \lambda x + 1 \\ y'' = \lambda y - \lambda + 3. \end{cases}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

2. Pour un point J nous avons

$$\begin{aligned}
(T \circ H)(M) = M'' &\iff \overrightarrow{OM''} = \lambda\overrightarrow{OM} + (1-\lambda)\overrightarrow{OI} + \vec{v} \\
&\iff \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM''} = \lambda(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM}) + (1-\lambda)\overrightarrow{OI} + \vec{v} \\
&\iff \overrightarrow{JM''} = \lambda\overrightarrow{JM} + (1-\lambda)\overrightarrow{OI} + (\lambda-1)\overrightarrow{OJ} + \vec{v}.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

   Si $\lambda = 1$, alors nous avons $\overrightarrow{MM''} = \vec{v}$ pour tout M, i.e. $T \circ H$ est une translation de vecteur $\vec{v}$.
   Si $\lambda \neq 1$, alors choisissons J tel que $(1-\lambda)\overrightarrow{OI} + (\lambda-1)\overrightarrow{OJ} + \vec{v} = \vec{0}$, et dans ce cas $T \circ H$ est une homothétie de centre J et de rapport λ.

3. Donc pour $\lambda \neq 1$, l'application $T \circ H$ est une homothétie de centre J et de rapport λ, avec

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} + \frac{\vec{v}}{1-\lambda}, \tag{B.18}$$

   ou

$$J\left(\frac{1}{1-\lambda}, \frac{3-\lambda}{1-\lambda}\right). \tag{B.19}$$

Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2 PN
Année académique : 21/22

19 juin 2022
Durée : 1 h 30

Examen de rattrapage de géométrie affine et euclidienne

Les calculatrices sont strictement interdites.

Exercice 1. (10 pts)
Soient $A(-1,0,2)$, $B(1,0,1)$ et $C(0,1,0)$ trois points dans un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Trouver le point G tel que $3\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{CG}$.
2. Donner une représentation paramétrique du plan affine $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
3. Soit P_1 le plan affine d'équation cartésienne $x - y = 2$. Déterminer $\overrightarrow{P_1}$.
4. Déterminer l'intersection du plan affine P_1 et de la droite affine $D(A, \overrightarrow{AB})$.
5. Ecrire en coordonnées l'homothétie de centre C et de rapport -2.

Exercice 2. (04 pts)
Soit P le plan d'équation $x - y + z + 1 = 0$ dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Déterminer la projection orthogonale du point $N(-1,0,1)$ sur P.
2. Déterminer $\mathrm{d}(N,P)$, la distance de N au plan P.

Exercice 3. (06 pts)
Soit E un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Considérons l'application $f : E \longrightarrow E$ qui associe à chaque point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = M$.
2. Prouver que f est une projection, et déterminer sa base et sa direction.

Corrigé de l'examen de géométrie affine et euclidienne

Exercice 1. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2)+(2)+(2)+(2).

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{CG} &\iff 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \\
&\iff G\left(\frac{3(-1,0,2)+(1,0,1)-2(0,1,0)}{2}\right) \\
&\iff G\left(-1,-1,\frac{7}{2}\right).
\end{aligned} \tag{B.20}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}: \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}:\ \begin{cases} x = 2\alpha+\beta-1, \\ y = \beta, \\ z = -\alpha-2\beta+2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in P_1 &\iff x - y = 1 \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}: x = \alpha+2,\ y = \alpha,\ z = \beta \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}: (x,y,z) = (\alpha+2,\alpha,\beta) \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}: (x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) + (2,0,0) \\
&\iff \exists\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}: \overrightarrow{IM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \\
&\iff M \in P(I,\vec{u},\vec{v}),
\end{aligned}$$

où $\vec{u}(1,1,0),\ \vec{v}(0,0,1),\ I(2,0,0)$. Alors

$$\overrightarrow{P_1} = \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}. \tag{B.22}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in D(A,\overrightarrow{AB}) &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}: \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \\
&\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}: x = 2\lambda-1 \quad \text{et} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = -\lambda+2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
H \in P_1 \cap D(A,\overrightarrow{AB}) &\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}: x = 2\lambda-1 \quad \text{et} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = -\lambda+2 \\
&\qquad \text{et} \quad x - y = 2 \\
&\iff \lambda = \tfrac{3}{2} \\
&\iff H\left(2,0,\tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{B.23}$$

5. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport -2, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$. Alors

$$\begin{aligned} M' = h(M) &\iff \overrightarrow{CM'} = -2\overrightarrow{CM} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OC} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OC} \\ &\iff \begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y + 3, \\ z' = -2z. \end{cases} \end{aligned} \tag{B.24}$$

Exercice 2. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2).

1. Soit N' la projection orthogonale de N sur P. Alors nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AN'} + \overrightarrow{N'N} \\ &= \overrightarrow{AN'} + \alpha\vec{n}, \quad \text{où} \quad \vec{n}(1,-1,1). \end{aligned} \tag{B.25}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AN}, \vec{n} \rangle &= \langle \overrightarrow{AN'}, \vec{n} \rangle + \alpha \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \\ &= \alpha \|\vec{n}\|^2 \quad (\text{car} \quad \overrightarrow{AN'} \perp \vec{n}). \end{aligned} \tag{B.26}$$

Alors

$$\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AN}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}. \tag{B.27}$$

Et comme $\overrightarrow{NN'} = -\alpha\vec{n}$, alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON'} &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \\ &= \overrightarrow{ON} + \alpha\vec{n} \\ &= \overrightarrow{ON} - \frac{\langle \overrightarrow{AN}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}. \end{aligned} \tag{B.28}$$

Alors

$$N'\left(\frac{-4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \tag{B.29}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(N,P) &= \|\overrightarrow{NN'}\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{B.30}$$

Exercice 3. Les points sont répartis comme suit : (2)+(2)+(2).

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
f(M)=M &\iff (x',y')=(x,y)\\
&\iff x=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad y=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\\
&\iff x-y=1 \quad \text{et} \quad x-y=1\\
&\iff x-y=1.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

L'esemble des points M tels que $f(M)=M$ est la droite D d'équation $x-y=1$.

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} &= (x'-x)\vec{e}_1+(y'-y)\vec{e}_2\\
&= \left(\tfrac{-1}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\right)(\vec{e}_1-\vec{e}_2)\\
&= g(x,y)\vec{v},
\end{aligned} \tag{B.32}$$

où $\quad g(x,y)=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2} \quad$ et $\quad \vec{v}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
x'-y' &= \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\\
&= 1
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Alors de ce qui précède on voit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à $\vec{v}$ et $M'\in D$, ce qui veut dire que f est la projection de base la droite D (d'équation $x-y=1$) et de direction le vecteur $\vec{v}(1,-1)$.

Annexe C

Tests corrigés

Test 1. $(7,5$ points, 17 mai 2022)
Soient $A(1,0)$, $\quad B(-5,3)$, $\quad C(5,10)$ des points d'un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, et G un point tel que

$$G = \mathrm{Bar}\{(B,2),\ (C,-3)\}.$$

1. Déterminer G.
2. Déterminer le point R tel que $3\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BC}$.
3. Déterminer le point I milieu du segment $[AC]$.
4. Ecrire en coordonnées l'homothétie de centre B et de rapport -3.
5. Quelle est l'image du point $M(2,3)$ par l'homothétie précédente ?

Corrigé. Les points sont répartis comme suit : $[1,5]+[1,5]+[1,5]+[1,5]+[1,5]$.

1. Nous avons en général

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i) : i=1,\dots,n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\iff \sum_1^n \alpha_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Bar}\{(B,2),\ (C,-3)\} &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}}{-1} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} \\ &\iff G(25,24). \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{BC} &\iff \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
&\iff \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\
&\iff R(\frac{13}{3}, \frac{7}{3})
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
I \text{ est milieu de } [AC] &\iff \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\
&\iff I(3,5).
\end{aligned}$$

4. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -3, $M(x,y)$, $M'(x',y')$. Alors

$$\begin{aligned}
M' = h(M) &\iff \overrightarrow{BM'} = -3\overrightarrow{BM} \\
&\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OB} \\
&\iff \overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OB} \\
&\iff \begin{cases} x' = -3x - 20 \\ y' = -3y + 12. \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Par la réponse précédente, l'image du point $M(2,3)$ est le point $M'(-26,3)$.

Test 2. (7,5 points)
Soient $A(1,2)$, $B(-2,3)$, $C(5,1)$ des points d'un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, et G un point tel que

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,2),\ (B,-1)\}.$$

1. Déterminer G.
2. Déterminer le milieu du segment $[BC]$.
3. Déterminer le point L tel que $2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{BC}$.
4. Ecrire en coordonnées l'homothétie de centre A et de rapport -2.
5. Quelle est l'image du point $R(2,3)$ par l'homothétie précédente ?

Corrigé. Les points sont répartis comme suit : $[1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5]$.

1. Nous avons en général

$$\begin{aligned}
G = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i) : i = 1, \ldots, n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\
&\iff \sum_1^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}.
\end{aligned}$$

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,2),\ (B,-1)\} \iff \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$
$$\iff G(4,1).$$

2. Nous avons

$$I \text{ est milieu de } [BC] \iff \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$
$$\iff I(3/2, 2).$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{BC} &\iff \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &\iff \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &\iff L(\frac{9}{2}, 1). \end{aligned}$$

4. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -2, $M(x,y)$, $M'(x',y')$. Alors

$$\begin{aligned} M' = h(M) &\iff \overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OA} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OA} \\ &\iff \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Par la réponse précédente, l'image du point $R(2,3)$ est le point $R'(-1,0)$.

Test 3. (7, 5 points)
Soient $A(1,0,1)$, $B(-1,2,1)$, $C(0,1,0)$ des points d'un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et G un point tel que

$$G = \mathrm{Bar}\{(A,2),\ (B,-3)\}.$$

1. Déterminer G.
2. Déterminer $\overrightarrow{AB}$, $C - B$.
3. Déterminer le point N tel que $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AN}$.
4. Ecrire en coordonnées la translation de vecteur $\vec{v}(3,2,0)$.
5. Quelle est l'image du point $M(-2,1,0)$ par la translation précédente ?

Corrigé. Les points sont répartis comme suit : $[1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5]$.

1. Nous avons en général

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i) : i = 1,\dots,n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\iff \sum_1^n \alpha_i(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \text{Bar}\{(A,2),\ (B,-3)\} &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}}{-1} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} \\ &\iff G(-5,6,1). \end{aligned}$$

2. Nous avons $\overrightarrow{AB}(-2,2,0)$ et $C - B = \overrightarrow{BC}$, et donc $(C-B)(1,-1,-1)$.
3. Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AN} &\iff \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &\iff N(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \end{aligned}$$

4. Soit T la translation de vecteur $\vec{v}$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$. Alors

$$\begin{aligned} M' = T(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{v} \\ &\iff \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{v} \\ &\iff \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \\ z' = z + 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Par la réponse précédente, l'image du point $M(-2,1,0)$ est le point $M'(1,3,0)$.

Test 4. $(7,5$ points$)$
Soient $A(0,0,1)$, $\quad B(-1,0,1)$, $\quad C(2,1,1)$ des points d'un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et G un point tel que

$$G = \text{Bar}\{(A,2),\ (B,1)\}.$$

1. Déterminer le point I milieu du segment $[CA]$.
2. Déterminer G.
3. Déterminer le point H tel que $3\overrightarrow{BH} = (1/2)\overrightarrow{BC}$.
4. Ecrire en coordonnées la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
5. Quelle est l'image du point $M(1,0,1)$ par translation précédente ?

Corrigé. Les points sont répartis comme suit : $[1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5] + [1,5]$.

1. Nous avons

$$\begin{aligned} I \text{ est milieu de } [CA] &\iff \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &\iff I(1, 1/2, 1). \end{aligned}$$

2. Nous avons en général

$$\begin{aligned}
G = \text{Bar}\{(A_i, \alpha_i) : i = 1, \dots, n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\
&\iff \sum_1^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G = \text{Bar}\{(A, 2),\ (B, 1)\} &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \\
&\iff G(-1/3, 0, 1).
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{BH} = (1/2)\overrightarrow{BC} &\iff \overrightarrow{BH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\
&\iff \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\
&\iff \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\
&\iff H(\frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 1)
\end{aligned}$$

4. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$. Alors

$$\begin{aligned}
M' = T(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \\
&\iff \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} \\
&\iff \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AB} \\
&\iff \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Par la réponse précédente, l'image du point $M(1, 0, 1)$ est le point $M'(0, 0, 1)$.

Test 5. (7, 5 points)
Soient $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(-2, -2)$ des points d'un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, et G un point tel que

$$G = \text{Bar}\{(A, 2),\ (B, -3),\ (C, 0)\}.$$

1. Déterminer $\overrightarrow{AB}$, $A - B$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d'équation $(1/2)x - y + 2 = 0$.
3. Déterminer G.
4. Ecrire en coordonnées l'homothétie de centre B et de rapport -1.

5. Quelle est l'image du point $M(2,3)$ par l'homothétie précédente ?

Corrigé. Les points sont répartis comme suit : $[1,5]+[1,5]+[1,5]+[1,5]+[1,5]$.

1. Nous avons $\overrightarrow{AB}(1,2)$, $(A-B)(-1,-2)$.
2. Soit D le plan d'équation $(1/2)x-y+2=0$. Alors

$$\begin{aligned} M(x,y)\in D &\iff x=2y-4 \\ &\iff \exists\alpha\in\mathbb{R}:(x,y)=(2\alpha-4,\alpha) \\ &\iff \exists\alpha\in\mathbb{R}:\begin{cases} x=2\alpha-4 \\ y=\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Nous avons en général

$$\begin{aligned} G=\mathrm{Bar}\{(A_i,\alpha_i):i=1,\dots,n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0} \\ &\iff \sum_1^n \alpha_i(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OG})=\vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OG}=\frac{\sum_1^n \alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G=\mathrm{Bar}\{(A,2),\ (B,-3)\ (C,0)\} &\iff \overrightarrow{OG}=\frac{2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}}{-1} \\ &\iff \overrightarrow{OG}=-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB} \\ &\iff G(2,7). \end{aligned}$$

4. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -1, $M(x,y)$, $M'(x',y')$. Alors

$$\begin{aligned} M'=h(M) &\iff \overrightarrow{BM'}=-\overrightarrow{BM} \\ &\iff \overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB} \\ &\iff \overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OB} \\ &\iff \begin{cases} x'=-x \\ y'=-y+6. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Par la réponse précédente, l'image du point $M(2,3)$ est le point $M'(-2,3)$.

Bibliographie

[1] Pedon, E., *Cours de géométrie affine et euclidienne pour la licence de mathématiques*, Université de Reims-Champagne Ardenne, 2015.

[2] Audin, A., *Géométrie*, Collection Enseignement Sup.

[3] Kerbrat, Y. et Braemer, J., *Géométrie des courbes et surfaces.*