Université de Bejaia

Département d'Informatique

Théorie des langages

Ce document contient le résumé (les affichages faits par semaine) de ce que nous avons fait en ligne durant cette période de pandémie.

Les notions fondamentales que les étudiants doivent acquérir, dans cette partie du cours faite en ligne, sont :

- Comprendre les notions de base (Concaténation, miroir, etc.).
- Trouver des grammaires qui génèrent un langage donné.
- Trouver le langage généré par une grammaire donnée.
- Déterminer le type des règles, des grammaires et des langages.
- Trouver un AEF pour un langage de type 3 donné.
- Trouver le langage (sous forme d'ensemble ou d'expression régulière) reconnu par un AEF donné.
- Transformer une expression régulière en AEF.
- Transformer un AEF généralisé en AEF simple et déterministe.

NB1 : Les enseignants du module sont disponibles pour accompagner et répondre aux questions des étudiants sur l'e-mail suivant, enseignement.thl@gmail.com

NB2 : Nous vous informons aussi qu'une page Facebook a été créée, nous y afficherons les questions redondantes des étudiants avec nos réponses. Nous encourageons les étudiants à interagir entre eux sur cette page. Nous l'avons nommée « Cours ThL, Informatique, Université de Bejaia ». Vous pourrez aussi nous contacter sur cette page.

NB3 : Vous pouvez consulter le fichier ppt avec des explications sonores, enregistré sur le drive à partir du lien suivant :

https://drive.google.com/file/d/1mGOTr-1BjtbZ9RIf9CYteUJjMoIt1fJa/view?usp=sharing

Travail à faire Semaine 1 :

Cours : Etudier de la page 4 jusqu'à la page 8 du support de cours

(Définition de la concaténation, définition de la longueur d'un mot, définition du miroir d'un mot, définition de la puissance d'un mot, factorisation, définition d'un langage formel, opérations sur les langages, propriétés).

TD : Exercice 1 et 2 de la série 1.

Corrigé Serie de TD 1

Exo 1

* ε n'appartient à aucun des 7 langages de l'exo
* a appartient uniquement L_2 et L_5
* abba " " L_2 et L_3
* abbaacc n'appartient à aucun des 7 langages
* aba appartient uniquement à L_2
* aabb appartient " à L_1, L_2, L_3, L_6, L_7
* abb " " " L_2, L_5

NB $\{a,b\}^*$ signifie tous les mots qu'on peut construire avec les lettres "a" et/ou "b", y compris le "ε"

$\{a,b\}^+ = \{a,b\}^* \setminus \{\varepsilon\}$

Exo 2

$L_2 \cdot L_3 = \{ab, aba, aab, aaba, b, ba\}$

$L_2 \cdot L_1 = L_1$

$L_1 \cdot L_3 = \{a^i b^{j+1} a^k \ , \ i \geq j \geq 1 \ , 1 \geq k \geq 0\}$

$L_5 \cap L_1 = \{a^i b^i \ , \ i \geq 1\} = L_6$

$L_6 \cup L_5 = L_5$

$L_1 \cdot (L_2 \cap L_4) = L_1 \cdot \{\varepsilon\} = L_1$

$L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot \emptyset = \emptyset$

$(L_1 \cdot L_2)^R = \{a^k b^j a^i \ , \ 2 \geq k \geq 0 \ , i \geq j \geq 1\}$

$L_1^R \cdot L_2^R = \{b^j a^i \ \ i \geq j \geq 1\} = L_1^R$

Travail à faire Semaine 2 :

Cours : Etudier de la page 8 jusqu'à la page 11 du support de cours

Le but est de maitriser la génération de langages avec des grammaires (L'un des aspects les plus importants du module).

TD : Faire l'exercice 3 de la série 1, exercice 1 et 3 de la série 2.

PS : Nous notons que plusieurs grammaires différentes peuvent générer le même langage.

Solution TD

Exo3 Rappel Def1 $(E, *, e)$ est dit monoïde ssi

① $*$ est une loi de composition interne dans E
② $*$ est associative
③ e est l'élément neutre de l' "$*$"

Def2 f est un homomorphisme de monoïde de

(E_1, op_1, e_1) vers (E_2, op_2, e_2) ssi :

① (E_1, op_1, e_1) est un monoïde
② (E_2, op_2, e_2) est un monoïde
③ $f(x \; op_1 \; y) = f(x) \; op_2 \; f(y)$, $\forall x, y \in E_1$
④ $f(e_1) = e_2$

corrigé exo3

① Pour montrer que la concaténation des langages n'est pas distributive par rapport à l'intersection, il suffit de trouver 3 langages L_1, L_2, L_3 tq

$$L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \neq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$$

Soient $L_1 = \{a, \varepsilon\}$, $L_2 = \{b\}$, $L_3 = \{ab\}$

$$L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot \phi = \phi$$

$$L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3 = \{ab, b\} \cap \{aab, ab\}$$
$$= \{a, b\} \neq \phi$$

Donc la concaténation des langages n'est pas distributive par rapport à l'intersection

② Il suffit de trouver un langage tel que

$$L \cdot L \neq L$$

suite exo3

Soit $L = \{a, b\}$

$L \cdot L = \{aa, ab, ba, bb\} \neq L$.

Donc la concaténation n'est pas idempotante.

(3) ① $|..|$: est une application, car chaque mot de X^* possède une longueur unique.

② - "$\cdot$" est une loi de composition interne dans X^*, car $\forall w_1 \in X^*, \forall w_2 \in X^* \Rightarrow w_1 \cdot w_2 \in X^*$

- "$\cdot$" : est associative, (Propriété vue en cours)

- "ε" est l'élément neutre de "$\cdot$", car $\forall w \in X^*$: $w \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot w = w$

Donc $(X^*, \cdot, \varepsilon)$ est un monoïde

③ . "+" : est une loi de compositi° interne dans N : car la somme de deux element de N est un elemet de N

. "+" : est associative ; $a+b = b+a$, $\forall a, b \in N$

. 0 : est l'élement neutre de l'addition

Donc $(N, +, 0)$ est un monoïde.

④ $\forall w_1, w_2 \in X^*$, $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| + |w_2|$ Demontrable par recurence.

⑤ $|\varepsilon| = 0$

conclusion $|..|$ est un homomorphisme de monoïdes de $(X^*, \cdot, \varepsilon)$ dans $(N, +, 0)$

Serie de TD 2

Exo 1

① $T = \{o, b, a\}$

$N = \{S\}$

l'axiome : S

$P = \{ S \xrightarrow{R1} ooS ,\ S \xrightarrow{R2} Sb ,\ S \xrightarrow{R3} a ,\ S \xrightarrow{R4} \varepsilon \}$

② * $S \vdash^{R4} \varepsilon$ Donc $\varepsilon \in L(G)$

* les "o" sont générés 2 à 2, Donc on ne pourra jamais avoir un nombre impair de "o"

$ob \notin L(G)$

* $S \vdash^{R1} ooS \vdash^{R2} ooSb \vdash^{R4} oob$ Donc $oob \in L(G)$

$\vdash^{R3} ooab$ Donc $ooab \in L(G)$

$S \vdash^{R2} Sb \vdash^{R1} ooSb$

* $S \vdash^{2} Sb \vdash^{4} b$ Donc $b \in L(G)$

* $S \vdash^{2} Sb \vdash^{3} ab$ Donc $ab \in L(G)$

* $S \vdash^{2} Sb$

* $oaab$, ne contient qu'un seul "o" (impair) Donc $oaab \notin L(G)$

③ $S \vdash^{R1} {}^{*} (oo)^i S \vdash^{R2} {}^{*} (oo)^i S b^j$ ③ $(oo)^i a b^j$ ④ $(oo)^i b^j$

$L(G) = \{(oo)^i a b^j , (oo)^i b^j ,\ i,j \geq 0\}$

qu'on peut simplifier par

$L(G) = \{(oo)^i a^k b^j ,\ i,j \geq 0 ,\ 1 \geq k \geq 0\}$

Serie 2

Exo3

- $L_1 = \{ a^{2i} b^i , i \geqslant 0 \}$

Nous vous proposons plusieurs grammaires :

G_1 : $S \to aaSb / \varepsilon$

G_2
$S \to aA / \varepsilon$
$A \to aSb$

G_3
$S \to ASb / \varepsilon$
$A \to aa$

- $L_2 = \{ w \in \{a,b\}^*, \ |w|_a \equiv 0 [3] \}$ / le nbre de "a" est un multiple de 3

G_1
$S \to bS / aA / \varepsilon$
$A \to bA / aB$
$B \to bB / aS$

G_2 :
$S \to AAAS / bS / \varepsilon$
$bA \to Ab$
$A \to a$

$L_3 = \{ w w^R , w \in \{a,b\}^+ \}$

$\underline{G_1}$: $S \rightarrow aSa \,/\, bSb \,/\, aa \,/\, bb$

~~G_2 $S \rightarrow AS / BS / AM / BM$~~

G_2 : $S \rightarrow aAa \,/\, bAb$

$A \rightarrow aAa \,/\, bAb \,/\, \varepsilon$

$L_4 = \{ a^{j-i} b^j c^i , \; i \geq 0 , \; j \geq 1 \}$

on fait d'abord un changement de variable

$\underline{\text{soit}}$ $k = j - i \implies j = k + i$

$L_4 = \{ a^k b^{k+i} c^i , \; i \geq 0 , \; j \geq 0 \}$

$\underline{G_1}$:

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aAb \,/\, \varepsilon$

$B \rightarrow bBc \,/\, \varepsilon$

[on a considéré $L_4 = \{ \underbrace{a^k b^k}_{A} \underbrace{b^i c^i}_{B} , \; i, k \geq 0 \}$

$\underline{G_2}$: $S \rightarrow AB \,/\, ab \,/\, bc \,/\, \varepsilon$

$A \rightarrow aAb \,/\, \varepsilon$

$B \rightarrow bBc \,/\, \varepsilon$

Travail à faire Semaine 3 :

Cours : Terminer le chapitre 1 du support de cours.

TD : Faire l'exercice 2, et terminer l'exo 3 de la série 2.

NB : Les langages restant de l'exo 3 sont relativement complexes.

Suite Exo3 Serie 2

L_5 :

$S \to ABSc \mid ASc \mid Sc \mid c$

$BA \to AB$

$Bc \to bc$

$Bb \to bb$

$Ab \to ab$

$Aa \to aa$

$Ac \to ac$

L_6 :

$L_6 = L'_6 \cup L''_6$

tq $L'_6 = \{a^i b^j c^i, \ i \geq j \geq 0\}$

$L''_6 = \{a^i b^j c^j, \ i \geq j \geq 0\}$

$S \to S_1 \mid S_2$ [S_1 generera L'_6 et S_2 generera L''_6]

$S_1 \to aS_1c \mid aS_1B_1c \mid \varepsilon$

$cB_1 \to B_1c$

$aB_1 \to ab$

$bB_1 \to bb$

$S_2 \to AB_2S_2c \mid B_2S_2c \mid \varepsilon$

$B_2A \to AB_2$

$B_2c \to bc$

$Ab \to ab$

$B_2b \to bb$

$Aa \to aa$

L_7 :

$S \to D S_1 F$

$S_1 \to a A S_1 \mid b B S_1 / \varepsilon$

$BF \to Fb$

$AF \to Fa$

$Da \to aD$

$Db \to bD$

$Ab \to bA$

$Aa \to aA$

$Bb \to bB$

$Ba \to aB$

$DF \to o\ DF / \varepsilon$.

L_8 :

$S \to DMF$

$M \to AM / aa$

$Aa \to aaA$

$AF \to F$

$Da \to aD$

$DF \to \varepsilon$.

Exo2 serie 2

①

* 00 , 1000 , 1110 appartiement au langage L

1100 , 11110 n'appartiement pas à L .

② $L = \{ w \in \{0,1\}^* , |w|_1 - |w|_0 \equiv 2 \, [4] \}$

③ $S \longrightarrow 0C \mid 1A$

$A \rightarrow 0S \mid 1B$

$C \rightarrow 0B \mid 1S$

$B \rightarrow 0A \mid 1C \mid \varepsilon$

Interrogation : Faire l’exercice donné et nous l'envoyer avant le 02 Mai à minuit, en PDF.

NB: Nous affichons un algorithme qui permet de déterminer le type des règles et des grammaires.
Dans les solutions des exercices, le type des règles est mis comme un nombre encerclé au-dessus de la règle.

Travail de maison à remettre.

Exo soient $L_1 = \{ \varepsilon, a, aa \}$

$L_2 = \{ a^i b^j c^{2k}, \; i \geq 0, j \geq 1, k > 0 \}$

$L_3 = \{ a^i b^j c^{2i}, \; i, j \geq 0 \}$

① parmi les mots suivants, quels sont ceux qui appartiennent à quel langages :

ε, abc, abcc, abbcc, ccba, b

② calculer $L_1 \circ L_2$ et $L_2 \cap L_3$

③ Trouver des grammaires generant chacun des langages L_1, L_2 et L_3.

PS Les reponses doivent être mises dans un fichier PDF, ce fichier doit contenir au moins le nom, le prenom et le groupe de l'étudiant.

Resumé sur les types :

Notations

$w \in T^*$: w est une suite de terminaux (minuscules), ou bien "ε"

$w \in (T \cup N)^*$: w est une suite de terminaux et non terminaux

$A \in N$: A est une majuscule (un non terminal)

Algo : ce pseudo Algorithme détermine le type d'une règle. "$(\alpha \Rightarrow \beta)$"

Debut

Si membre gauche de la règle contient un seul caractère

  Alors Si membre droit de la règle est sous l'une des trois formes suivantes : w ou bien Aw ou bien wA tq $w \in T^*$, $A \in N$

    Alors La regle est de type 3

    Sinon la regle est de type 2.

  Sinon si $|\alpha| \leq |\beta|$ alors la regle est de type 1

    Sinon la regle est de type "0"

Fin

type d'une grammaire

En général, c'est le type de la regle la plus petite (en terme de nombre)

Exceptions $A \rightarrow \varepsilon$ avec A n'est pas l'axiome est une regle de type 3 mais pas de type 1.

NB type 3 $\subseteq$ type 2 $\subseteq$ type 1 $\subseteq$ type 0

Exo4 Serie 2 :

G_1 : $S \rightarrow aA \mid \varepsilon$ ③ ③

$A \rightarrow Sb$ ③

G_1 est de type 2
c'est l'une des exceptions
" car la gram n'est ni regulière à droite ni régulière à gch

G_2 : $S \rightarrow AB \mid \varepsilon$ ② ③

$A \rightarrow aAb / ab$ ② ③

$B \rightarrow bBc / bc$ ② ③

G_2 est de type 2

G_3 $S \rightarrow abS / Sbc / AB$ ③ ③ ②

$A \rightarrow oA \mid \varepsilon$ ③ ③

$oBb \rightarrow obb$ ①

· G_3 est de type "0"
l'autre exception.
à cause $(A \rightarrow \varepsilon)$ qui n'est pas de type 3.

G_4 $S \rightarrow DAF$ ②

$A \rightarrow aAC \mid \varepsilon$ ② ③

$CF \rightarrow FBc$ ⓪

$cB \rightarrow Bc$ ⓪

$aF \rightarrow Fa$ ⓪

$DF \rightarrow \varepsilon$ ⓪

$aB \rightarrow ab$ ①

$bB \rightarrow bb$ ①

G_4 est de type "0"

Suite exo4 serie 2 :

* $L(G_1)$ $S \vdash aA \vdash aSb \vdash aaAb \vdash aaSb$

$a^n S b^n \vdash a^n b^n$

$L(G_1) = \{a^n b^n , n \geq 0\}$

* $L(G_2)$: $S \vdash AB \vdash^* a^i A b^i B \vdash a^{i+1} b^{i+1} B \vdash$

$a^{i+1} b^{i+1} b^j B c^j \vdash a^{i+1} b^{i+1} b^{j+1} c^{j+1}$

$\{a^{i+1} b^{i+j+2} c^{j+1}\}$

$L(G_2) = \{a^{i+1} b^{i+j+2} c^{j+1} , i,j \geq 0\} \cup \{\varepsilon\}$

qu'on peut ecrire autrement

$\{a^i b^{j+i} c^j , i,j \geq 1\} \cup \{\varepsilon\}$.

$L(G_3)$: $S \vdash^* (ab)^i S \vdash^* (ab)^i S (bc)^j \vdash (ab)^i AB(bc)^j$

$\vdash^* (ab)^i o^k A B (bc)^j \vdash^* (ab)^i o^k B (bc)^j$

$\vdash (ab)^i o^k b (bc)^j$

$L(G_3) : \{(ab)^i o^k b (bc)^j , i \geq 0, k,j \geq 1\}$

$L(G_4)$: Etant donné sa complexité, on le fera le jour ou on reprendra.

Travail à faire Semaine 5 :

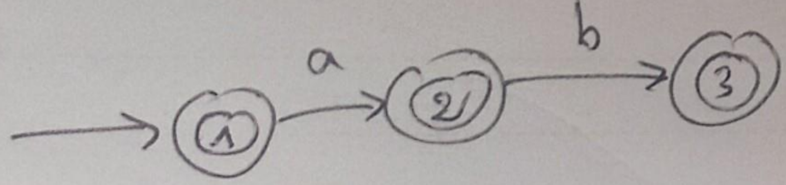
Cours : étudier de la page 17 jusqu'à la page 23 , il faut absolument comprendre les exemples corrigés des AEF. (Se focaliser sur la représentation graphique des AEF).

TD : Faire l'exo 1 de la série 3.

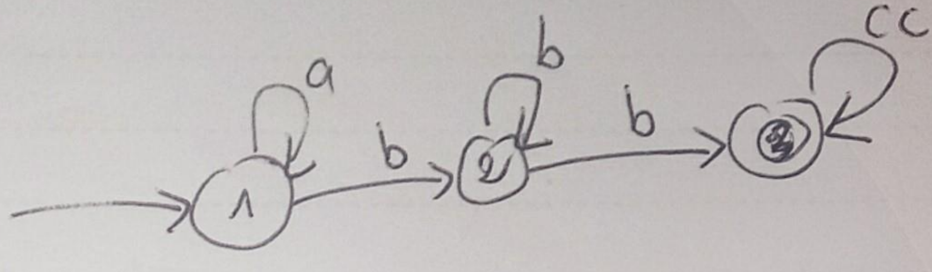
Serie 3

Exo 1

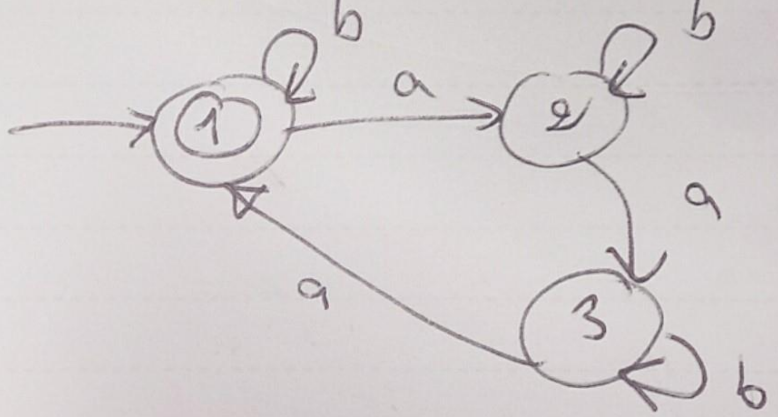
L_1 :



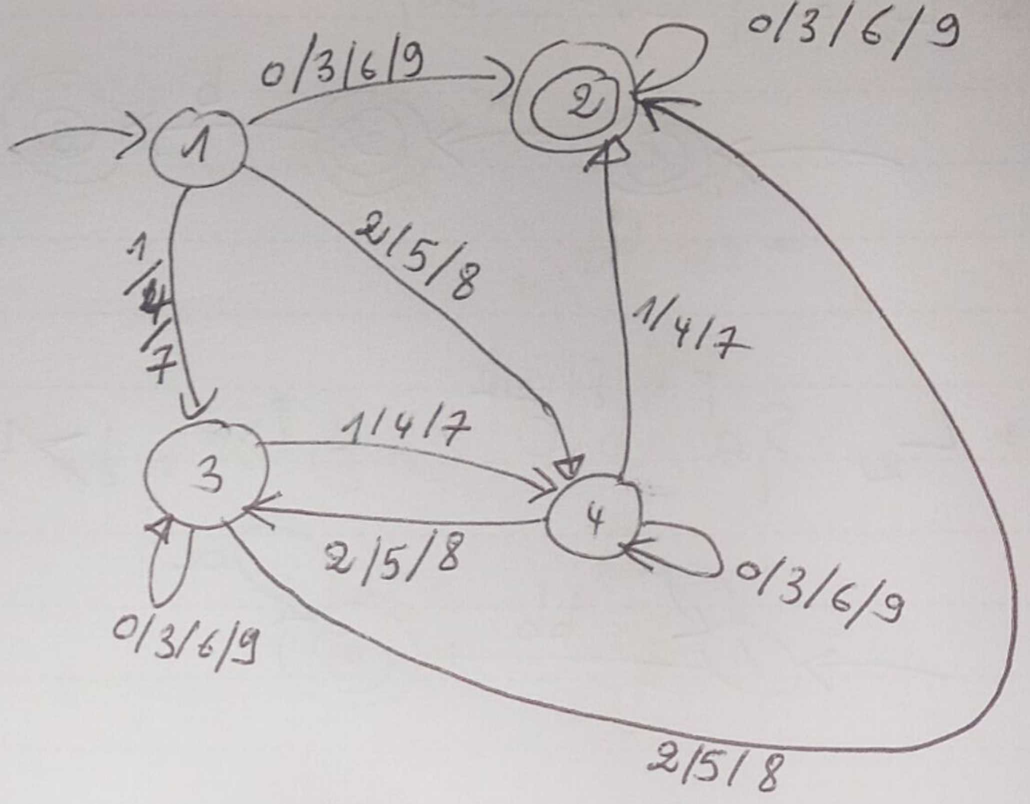
L_2 :



L_3 :



L_4 = Les multiples de 3



L_5 et L_6, on les fera une fois les expressions regulières etudiées.

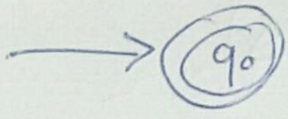
Travail à faire Semaine 6 :

Cours : étudier de la page 23 jusqu'à la page 25.

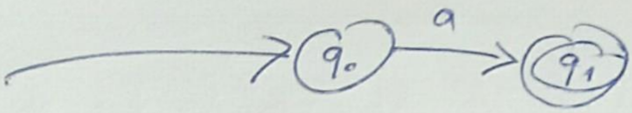
TD : L'exercice ExoS7 des exo supplémentaires, du langage Ls1 jusqu'à Ls8.

corrigé exo 5 7 :

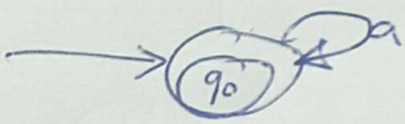
* $LS_1 = \{\varepsilon\}$



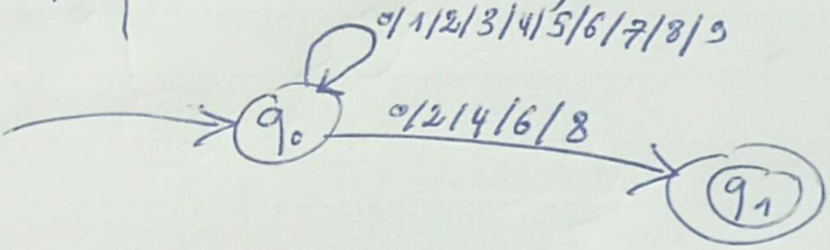
* $LS_2 = \{a\}$



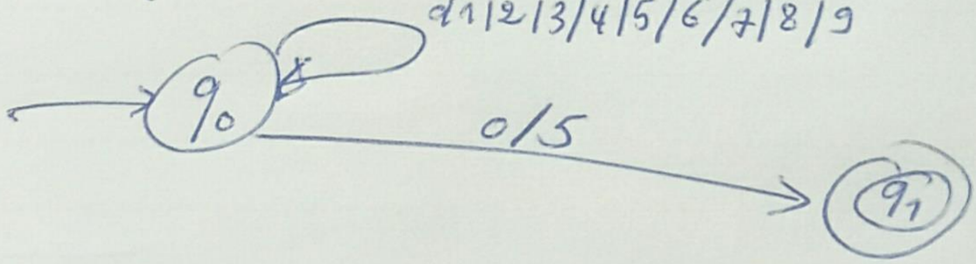
* $LS_3 = \{a^i, i \geq 0\}$



* $LS_4 = \{$ Les entiers pairs $\}$

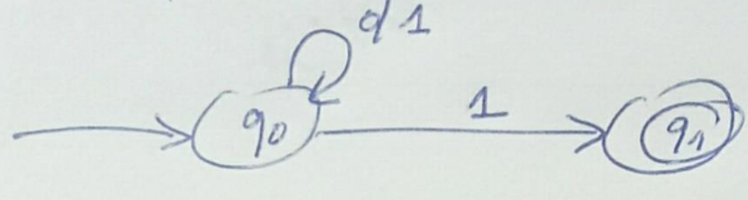


$LS_5 = \{$ Les entiers divisibles par 5 $\}$

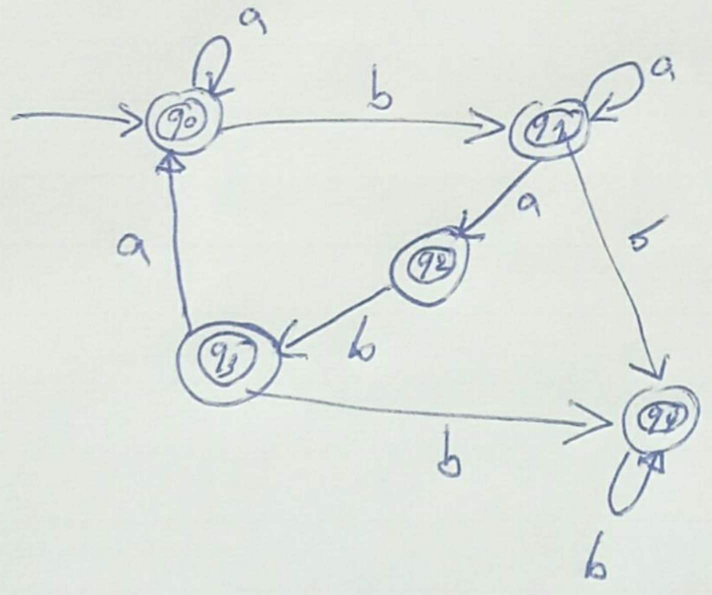


suite Exos 7

L_6 = { les nbres binaires impairs }



L_7 = { les mots de $\{b, a\}^*$, ne contenant pas la sous-chaîne bba }



Travail à faire Semaine 7 :

Cours : Terminer le chapitre 2 (sans étudier la minimisation des AEF).

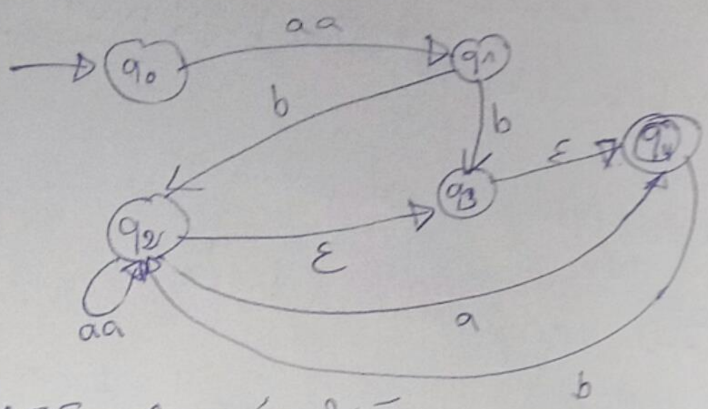
TD : Faire l'exo2 de la série 3. (Sans faite la question. 2 et 6, car elles incluent la minimisation).

NB : on poursuit le module avec des séances en visio-conférences sur Zoom selon les affichages.

xo2 Serie 3

(1)

L'AEF de l'exercice est le suivant :



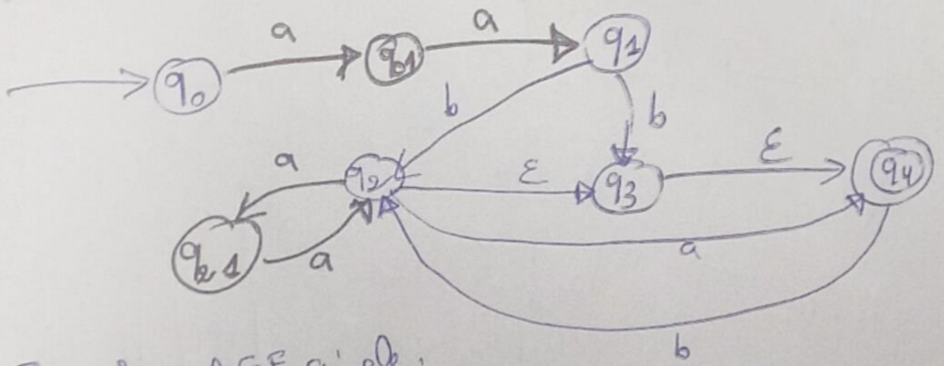
cet AEF est généralisé

AEF simple et deterministe

Etape 1 AEF partiellement généralisé

il s'agit d'enlever les transitions avec des mots de

longueur superieure ou égale à 2

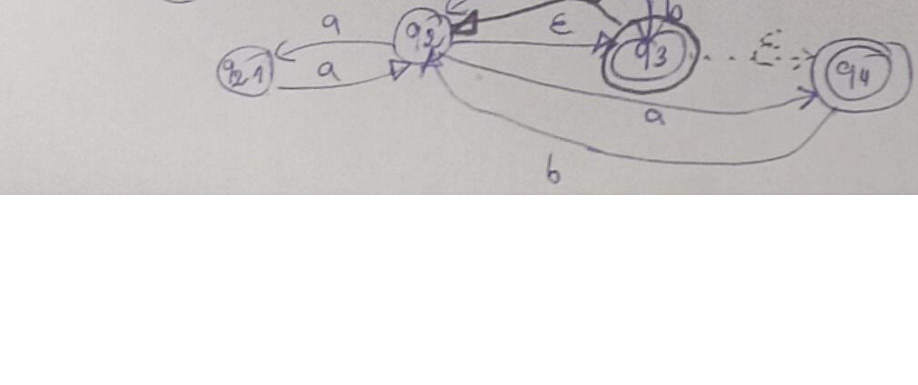


Etape 2 AEF simple :

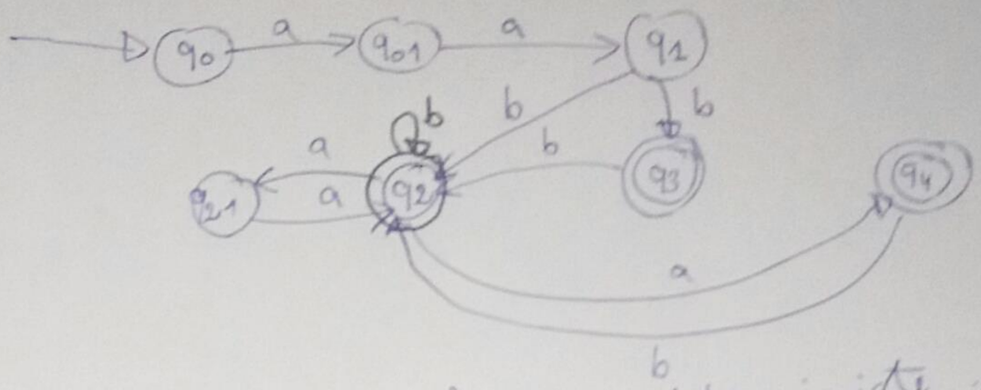
Il s'agit d'enlever les ε-transitions, il est recommandé

traiter les "ε" consecutifs un à un.

premier ε :



Exo2 : Serie 3:
Le second "ε" (entre q_2 et q_3)



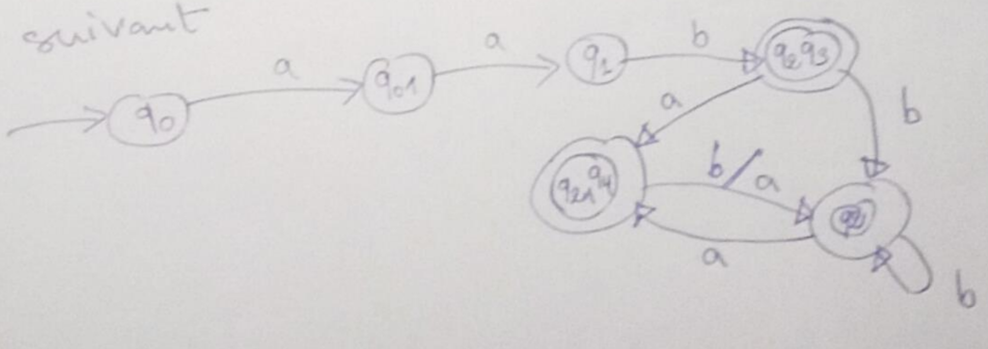
AEF simple non deterministe.

Etape3 trouver l'AEF simple et deterministe:

Table des transitions

	a	b
→ q_0	q_{01}	/
q_{01}	q_1	/
q_1	/	$q_2 q_3$
$q_2 q_3$	q_{21} q_4	q_2
q_2	q_{21} q_4	q_2
q_{21} q_4	q_2	q_2

Donc l'AEF simple et deterministe est le suivant



suite exo2 Serie 3 :

② AEF minimal [j'ai demandé de ne pas faire ça]

③ Le langage reconnu par cet AEF

$$L(A) = aab\left[a\left((b+a)\,b^{*}a\right)^{*} + b\left(b^{*}a\,(b+a)\right)^{*} \right]$$

④ Vous apprendrez ça en compilation.

⑤ La grammaire regulière à droite :

- L'axiome est q_0
- $N = \{ q_0, q_{01}, q_1, q_2q_3, q_{21}q_4, q_2 \}$
- $T = \{a, b\}$
- $P = \{$

$$q_0 \rightarrow a\,q_{01}$$
$$q_{01} \rightarrow a\,q_1$$
$$q_1 \rightarrow b\,q_2q_3 \mid b$$
$$q_2q_3 \rightarrow a\,q_{21}q_4 \mid a \mid b\,q_2 \mid b$$
$$q_{21}q_4 \rightarrow b\,q_2 \mid a\,q_2 \mid a \mid b$$
$$q_2 \rightarrow b\,q_2 \mid a\,q_{21}q_4 \mid a \mid b \;\}$$

⑥ On vous a demandé de ne pas la faire