Université A/Mira de Béjaia Année :2019/2020

Faculté :ST **Solution de la série N° 1 (Maths 4)**

Département :GC

Exercice N° 1

Représenter, dans le plan, les ensembles suivants :

$A = \{z = x + iy \in \ C\ tq\ |z + i| = 2\}$, $B = \{z = x + iy \in \ C\ tq\ z = 1 - i + it, t \in \mathbb{R}\}$

$C = \{z \in \mathbb{C}\ tq\ |z + i| \leq 2\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}\ tq\ 1 \leq |z + i| \leq 2\}$

Solution

Un petit Rappel

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe. Au sens géométrique, le nombre complexe $z = x+iy$ se représente dans le plan rapporté à un repère orthonormé par un point $M(x, y)$ ou un vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec $O(0, 0)$. De même, au sens géométrique, le module de z (noté $|z|$) se représente par $\|\overrightarrow{OM}\|$ où $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considérons un autre nombre complexe $z' = x' + iy'$. Maintenant, nous allons poser la question suivante :

Que signifie, aux sens géométrique, les quantités $(z - z')$ et $\|z - z'\|$?

Pour se faire, on représente le nombre complexe $z' = x' + iy'$ par le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ avec $M'(x', y')$. Par conséquent :

le nombre complexe $z-z'$ au sens géométrique se transforme au vecteur $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$.Cette dernière quantité se simplifie comme suit :

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{M'M}$$

[Ce qu'il faut retenir] :

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

• Le nombre complexe $z - z'$ se représente, aux sens géométrique, par le vecteur $\overrightarrow{M'M}$, avec $M(x, y)$ et $M'(x', y')$.

On déduit ainsi,

• Le module $|z - z'|$ se représente, aux sens géométrique, par la distance entre M et M' notée $\|\overrightarrow{M'M}\|$, sans oublier $\|\overrightarrow{M'M}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

Pour applications, revenons à l'exercice **N°** 1.

1) nous allons transformer l'ensemble A au sens géométrique.

au sens géométrique,

L'expression "$z = x + iy \in \mathbb{C}$" se transforme à l'expression "$M(x, y) \in P$"(plan).

$|z + i| = 2$ peut s'écrire $|z - (-i)| = 2$.

On note par $M'(0, -1)$, $M(x, y)$ les représentations, au sens géométrique, de $-i$ et z, respectivement. Donc, au sens géométrique, l'expression $|z - (-i)| = 2$ prend la forme $\|\overrightarrow{M'M}\| = 2$. Géométriquement, l'ensemble A s'écrit comme suit :

$$A = \left\{M \in P\ tq\ \|\overrightarrow{M'M}\| = 2\right\}.$$

En fin, l'ensemble A désigne le cercle de centre $M'(0, -1)$ de rayon 2.

Question supplémentaire :

Géométriquement, Que représente l'ensemble $E = \{z = x + iy \in \ C\ tq\ |z + i| \leq 2\}$?

2) La représentation géométrique de l'ensemble

$$B = \{z = x + iy \in \ C\ tq\ z = 1 - i + it, t \in \mathbb{R}\}$$

On a $B = \{x+iy \in \ C \ tq \ x+iy = 1-i+it, t \in \mathbb{R}\}$
$\quad = \{x+iy \in \ C \ tq \ x=1, \ y=-1+t, t \in \mathbb{R}\}$
Au sens géométrique, l'ensemble B prend la forme suivante : Comme t parcourt $\mathbb{R}$, $-1+t$ parcourt $\mathbb{R}$. Par conséquent, B peut s'écrire ainsi :

$$B = \{(1, \ T), T \in \mathbb{R}\}$$

En fin B désigne une droite passant par le point $(1,0)$ et parallèle à l'axe des Y. 3) la représentation géométrique de l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ tq \ 1 \leq |z+i| \leq 2\}$$

Autrement dit,

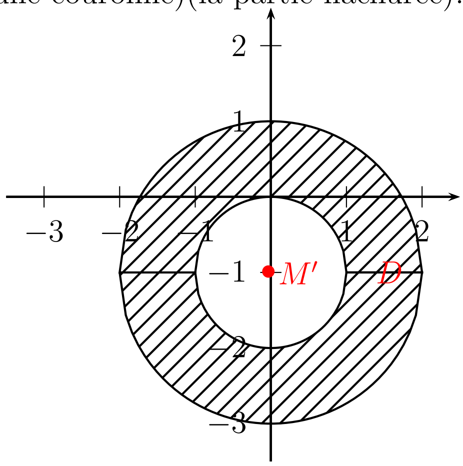
$$D = \{z \in \mathbb{C} \ tq \ |z-(-i)| \leq 2, \text{ et } |z-(-i)| \geq 1\}$$

Soient $M'(0,-1)$et $M(x,y)$ les représentations géométriques de $-i$ et z, respectivement. Soit $\|\overrightarrow{M'M}\|$ la représentation géométrique de $|z-(-i)|$. Au sens géométrique, D devient comme suit :

$$D = \left\{M(x,y) \in P \ tq \ \|\overrightarrow{M'M}\| \leq 2, \text{ et } \|\overrightarrow{M'M}\| \geq 1\right\}.$$

On note par :
D_1 le disque ouvert de centre M' de rayon 1.
D_2 le disque fermé de centre M' de rayon 2.
D'où

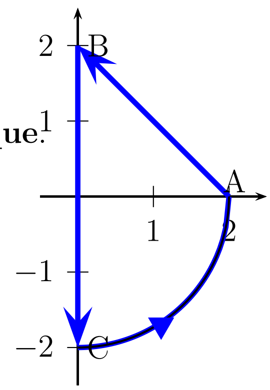
$D = \{M(x,y) \in P \ tq \ M(x,y) \in D_2 \text{ et } M(x,y) \notin D_1\}$ (c'est une couronne)(la partie hachurée).



Exercice N° 2

Calculer l'intégrale curviligne suivante :

1) $\oint_{(ABCA)} Re(z)|z|dz$



Un petit Rappel

•La Caractérisation d'un segment de droite au sens géométrique.

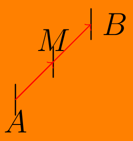
Soit $[AB]$ un segment de droite de sommets $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$.
On caractérise le segment $[AB]$ comme suit :

$$[AB] = \left\{M(x,y) \text{ tel que } \overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}\right\}$$

D'une façon générale,
Que signifie $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$?

$$\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$$

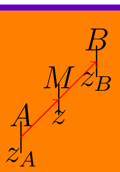
Voici la caractérisation de $[AB]$(appelée aussi la représentation paramétrique de $[AB]$)(au sens géométrique)



$$[AB] = \left\{ M(x,y) \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB};\ t \in [0,1] \right\}$$

Maintenant, nous allons transformer cette caractérisation aux sens complexe.
Au sens complexe, le point $M(x,y)$ se transforme en $z = x + iy$, $A(x_A, y_A)$ devient $z_A = x_A + iy_A$ et $B(x_B, y_B)$ devient $z_B = x_B + iy_B$.
Par conséquent, $\overrightarrow{AM}$ se ramène à $z - z_A$ et $\overrightarrow{AB}$ se ramène à $z_B - z_A$.

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB};\ t \in [0,1] \Leftrightarrow z - z_A = t(z_B - z_A);\ t \in [0,1]$$



Voici la caractérisation de $[AB]$(appelée aussi la représentation paramétrique de $[AB]$)(au sens Complexe)

$$[AB] = \{z = x + iy \text{ tel que } z = z_A + t\,(z_B - z_A)\,;\ t \in [0,1]\}$$

On écrit

$$z \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,1] :\ z = z_A + t\,(z_B - z_A) \tag{1}$$

Tous les points z de $[AB]$ s'écrivent sous la forme $z_A + t\,(z_B - z_A)$ avec $t \in [0,\ 1]$. Si l'on considère la fonction $z(t) = z_A + t\,(z_B - z_A)$ définie sur $[0,\ 1]$ alors, On peut écrire $[AB]$ comme suit

$$[AB] = \{z(t), \quad \theta \in [0,\ 1]\}\,.$$

•**La Caractérisation d'un Cercle au sens géométrique**.
Soit (C) un cercle de centre $A(x_A, y_A)$ de rayon R. (C) se caractérise comme suit :

$$(C) = \left\{ M(x,y) \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA}\| = R \right\}.$$

•**On en déduit la caractérisation de (C), au sens complexe :**

$$(C) = \{z = x + iy \text{ tel que } |z - z_A| = R\}\,,\ z_A = x_A + iy_A.$$

Comme

$$z - z_A = |z - z_A|e^{i\theta},\ \theta = \mathrm{Arg}(z - z_A)$$

, On en déduit

$$z \in (C) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0,\ 2\pi] :\ z = z_A + Re^{i\theta}. \tag{2}$$

Tous les points z de (C) s'écrivent sous la forme $z_A + Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,\ 2\pi]$. Si l'on considère la fonction $z(\theta) = z_A + Re^{i\theta}$ définie sur $[0,\ 2\pi]$ alors, On peut écrire (C) comme suit

$$(C) = \{z(\theta), \quad \theta \in [0,\ 2\pi]\}.$$

Maintenant, nous allons appliquer ces caractérisations sur des intégrales curvilignes de la forme $\displaystyle\int_C f(z)dz$ où C désigne un segment de droite ou un arc du cercle (exercice 2).

Remarque :Ce qu'il faut prendre en considération

Dans une intégrale de la forme $\displaystyle\int_C f(z)dz$:

☞ 1) Le chemin C désigne une courbe orientée(tracée dans le plan).

☞ 2) la variable $z = x + iy$ est considérée comme étant un point mobile $M(x, y)$ qui se déplace (suivant le sens d'orientation) sur le chemin C.

Solution de l'exercice N° 2

$$\oint_{(ABCA)} Re(z)|z|dz = \int_{[AB]} Re(z)|z|dz + \int_{[BC]} Re(z)|z|dz + \int_{(CA)} Re(z)|z|dz$$

Calculons $\displaystyle\int_{[AB]} Re(z)|z|dz$

On a $z_A = 2,\ z_B = 2i$

Ici le point z se déplace de A vers B, d'après la caractérisation (1)

$$z \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] :\ z = z_A + t\,(z_B - z_A)$$

Donc tous les points z de $[AB]$ s'écrivent sous la forme

$$z = 2 + t\,(2i - 2)\,, \quad t \in [0,\ 1].$$

Comme z est une fonction de t, $dz = z'(t)dt \Leftrightarrow dz = (2i - 2)\,dt$.

identifiant $|z|$ et $Re(z)$

Comme $z = 2 + t\,(2i - 2) = (2 - 2t) + i2t$ alors,

$$|z| = \sqrt{(2 - 2t)^2 + 4t^2},\ Re(z) = 2 - 2t.$$

Donc l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{[AB]} Re(z)|z|dz$ se ramène à l'intégrale simple, c'est à dire :

$$\int_{[AB]} Re(z)|z|dz = \int_0^1 (2 - 2t)\sqrt{(2 - 2t)^2 + 4t^2}\,(2i - 2)\,dt$$

$$\int_{[AB]} Re(z)|z|dz = (2i - 2)\int_0^1 (2 - 2t)\sqrt{(2 - 2t)^2 + 4t^2}dt$$

Pour calculer cette intégrale utiliser le changement de variable suivant

$$t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$$

On donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{Arg sh(x)} + \text{cste}$$

Calculons $\displaystyle\int_{(CA)} Re(z)|z|dz$

(CA) désigne l'arc du cercle de centre $O(0, 0)$.

On a $z_O = 0$ et $R = 2$.
Le point z se déplace de C vers A, Suivant l'arc du cercle, d'après la caractérisation (2) .

$$z \in (CA) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi] : \; z = z_O + Re^{i\theta}$$

$$z \in (CA) \Leftrightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi] : \; z = 0 + 2e^{i\theta}$$

Donc tous les points z de l'arc (CA) s'écrivent sous la forme

$$z = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \; 2\pi].$$

Comme z est une fonction de θ, $dz = z'(\theta)d\theta \Leftrightarrow dz = 2ie^{i\theta}d\theta$.
identifiant $|z|$ et $Re(z)$

$$|z| = 2; \quad Re(z) = 2\cos\theta$$

Donc l'intégrale curviligne $\int_{(CA)} Re(z)|z|dz$ se ramène à l'intégrale simple, c'est à dire :

$$\int_{(CA)} Re(z)|z|dz = \int_0^{2\pi} 8ie^{i\theta}\cos\theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} 8ie^{i\theta}\cos\theta d\theta = 8i\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta - 8\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta$$