
Exercice N° 1 (4pts)
1- (a)
Calculons l'intégrale curviligne $\int_{(C)} iz - \overline{z}dz$ où (c) désigne le chemin d'équation $z = it^2 + t$ joignant les deux points $z = 0$ et $z = 2 + i4$.
Remarque :
L'équation $z = it^2 + t$ s'appelle la représentation paramétrique de (C). t désigne le paramètre. à l'aide de L'équation $z = it^2 + t$ avec $t \in \mathbb{R}$ on trace une courbe sans extrémités. par exemple, le tableau suivant donne quelques points z de cette courbe pour différentes valeurs de t.

le paramètre t	le point z
-2	-2+4i c'est à dire (-2,4)
-1	1+i c'est à dire (-1,1)
0	0+i0 c'est à dire (0,0)
0.5	0.5+0.25i c'est à dire (0.5,0.25)
1	1+i c'est à dire (1,1)
1.5	1.5+i2.25 c'est à dire (1.5,2.25)
2	2+i4 c'est à dire (2,4)
2.5	2.5+ 6.25i c'est à dire (2.5,6.25)

comme la courbe (C) possède deux extrémités $z = 0$ et $z = 2 + i4$, on dit que (c) est gouvernée par l'équation $z = it^2 + t$ définie pour tout $t \in [0, 2]$.(voir le tableau).

Remarque :Ce qu'il faut prendre en considération

Dans une intégrale de la forme $\int_C f(z)dz$:
☞ 1) Le chemin C désigne une courbe orientée(tracée dans le plan).
☞ 2) la variable $z = x + iy$ est considérée comme étant un point mobile $M(x, y)$ qui se déplace (suivant le sens d'orientation) sur le chemin C.
a)
Dans notre cas, le chemin (c) est gouvernée par l'équation $z = it^2 + t$ et le point z se déplace sur cette courbe partant du point $0 + i0$ vers le point $2 + i4$. Par exemple, à l'instant $t = 0$ le point mobile z se trouve en $0 + i0$ et à l'instant $t = 2$ il arrive en $2 + i4$. (voir le tableau).
On a $z \in (C) \Leftrightarrow z = it^2 + t, \quad t \in [0,\ 2]$.
$dz = \frac{\partial z}{\partial t}dt = (2it + 1)dt$ et $\overline{z} = t - it^2$.
On remplace z par $it^2 + t$, $\overline{z}$ par $t - it^2$ et dz par $(2it + 1)dt$ dans l'intégrale en question on trouve

$$\int_{(C)} iz - \overline{z}dz = \int_0^2 \left(i\left(it^2 + t\right) - \left(t - it^2\right)\right)(2it+1)dt = (i-1)\int_0^2 \left(2it^3 + (1 + 2i)t^2 + t\right)dt$$

Reste à calculer cette intégrale simple par rapport à la variable réelle t.
1- b)
Calculons $\int_{(C)} iz - \overline{z}dz$ où C est formée des segments joignant 0 à $3i$ et $3i$ à $2 + 4i$.
On désigne par O, B et C les points $0 + i0$, $3i$ et $2 + i4$ (respectivement). Alors,

$$\int_{(C)} iz - \overline{z}dz = \int_{[OA]} iz - \overline{z}dz + \int_{[AB]} iz - \overline{z}dz. \tag{1}$$

Calculons $\int_{[OA]} iz - \overline{z}dz$**.**
Tous les points z qui se trouvent sur le segment de droite $[OA]$ s'écrivent comme suit :

$$z \in [OA] \Leftrightarrow z = z_O + t\left(z_A - z_O\right), \quad t \in [0,\ 1] \text{ avec } \ z_A = 3i; \quad z_O = 0 + i0.$$

C'est à dire

$$z \in [OA] \Leftrightarrow z = 3it.$$

$$dz = 3idt, \qquad \overline{z} = -3it.$$

Par conséquent, l'intégrale curviligne en question se ramène à l'intégrale simple comme indiqué sous dessous

$$\int_{[OA]} iz - \overline{z}dz = 3i(3i-3)\int_0^1 tdt = \frac{3i(3i-3)}{2}.$$

La deuxième intégrale de la formule 1 se fait de la même manière.
On laisse la question 1-c en exercice.
Question 2 **de l'exercice** 1**.**
Calculons $\int_{(C)} |z|^2 dz$;où (C) désigne le carré de sommets

$$O(0,0),\ A(1,0),\ B(1,1) \text{ et} C(0,1).$$

On a

$$\int_{(C)} |z|^2 dz = \int_{[OA]} |z|^2 dz + \int_{[AB]} |z|^2 dz + \int_{[BC]} |z|^2 dz \int_{[CO]} |z|^2 dz \tag{2}$$

Dans la formule 2, nous allons calculer une intégrale, les autres se font de la même manière.
A titre d'exemple, calculons $\int_{[BC]} |z|^2 dz$.

$$z \in [AB] \Leftrightarrow z = z_A + t\left(z_B - z_A\right), \quad t \in [0,\ 1] \text{ avec } \ z_A = 1; \quad z_B = 1 + i.$$

D'où

$$z \in [AB] \Leftrightarrow \exists t \in [0,\ 1] \text{ tq } z = 1 + ti.$$

$$|z|^2 = 1 + t^2,\ dz = idt.$$

En fin

$$\int_{[AB]} |z|^2 dz = \int_0^1 (1+t^2) idt = i\int_0^1 (1+t^2)dt = i\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

La deuxième intégrale de la question 2 (en exercice).

Solution de l'exercice 2**.**

1) Calculons $\int_{(C)} \frac{z + e^z}{z - 2i} dz$,$(C)$ désigne le cercle d'équation $|z| = 3$.
La forme exponentielle d'un nombre complexe z (quelconque) est donnée comme suit

$$z = |z|e^{i\theta} \text{ où } \ \theta \ \text{ désigne l'argument de } z.$$

Dans cette intégrale, On s'intéresse aux nombres complexes z dont $|z| = 3$. En effet

$$z \in (C) \Leftrightarrow z = |z|e^{i\theta} = 3e^{i\theta},$$

où $\theta \in [0,\ 2\pi]$.
D'autre part,

$$dz = 3ie^{i\theta}d\theta$$

D'où

$$\int_{(C)} \frac{z+e^z}{z-2i}dz = \int_0^{2\pi} \frac{3e^{i\theta}+e^{3e^{i\theta}}}{3e^{i\theta}-2i}3ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{3i}\int_0^{2\pi} \frac{3e^{i\theta}+e^{3e^{i\theta}}}{3e^{i\theta}-2i}d3e^{i\theta}.$$

Cette dernière intégrale possède la forme

$$\int \frac{3e^{i\theta}+e^{3e^{i\theta}}}{3e^{i\theta}-2i}d3e^{i\theta} = \int \frac{y+e^y}{y-2i}dy = !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!$$

Nous allons voir par la suite le calcul de cette intégrale, d'une manière plus simple, en utilisant l'intégrale de Cauchy .

C'est quoi un point singulier d'une fonction ?

Un nombre complexe z_0 est dit un point singulier pour la fonction $f(z)$ si et seulement si $f(z)$ n'est pas holomorphe en z_0 ou $f(z)$ n'est pas définie en z_0 .

Quelques propriétés importantes sur les intégrales curvilignes.

Propriété 1

Soit (C) un chemin simple, fermé,orienté. Soit $f(z)$ une fonction complexe de variable complexe.
Si $f(z)$ holomorphe sur (C) et à l'intérieur de (C) alors,

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0$$

Autrement dit, l'intégrale d'une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe est nulle.

Propriété 2

Soit (C) un chemin simple, fermé,orienté. Soient $f(z)$ une fonction complexe de variable complexe et z_0 l'unique point singulier pour $f(z)$ appartenant à l'intérieur de (C).
On a

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(k_\epsilon)} f(z)dz,$$

où (k_ϵ) désigne un cercle de centre z_0 de rayon ϵ (ϵ étant quelconque).
D'une manière générale; si z_0, z_1,...,z_k les k points singuliers pour $f(z)$,alors

$$\int_{(C)} f(z)dz = \int_{(k_\epsilon;z_0)} f(z)dz + \int_{(k_\epsilon,z_1)} f(z)dz + ... + \int_{(k_\epsilon,z_k)} f(z)dz;$$

où $(k_\epsilon; z_0)$ désigne un cercle de centre z_0 de rayon ϵ, $(k_\epsilon; z_1)$ désigne un cercle de centre z_1 de rayon ϵ,...,$(k_\epsilon; z_k)$ désigne un cercle de centre z_k de rayon ϵ et ϵ étant quelconque.