Question de l'étudiant. O. S.
Bonjour monsieur;
je voulais vous posez une question concernant la formule de Taylor-Lagrange
-comment peut-on deviner a quel ordre , veut dire a quelle dérivée qu'on vas s'arrêter ?
- y'aura-t-il une astuce pour deviner a quel ordre est notre fonction ?
Cordialement.

Bonjour.
On devine l'ordre de la formule de Taylor de l'expression à démontrer.

**Par exemple** pour montrer $\forall x > 0 : 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)}} \leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$, on calcule la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 ($f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$ avec 0<c<x )
de $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)}}$ puis on majore et on minore le reste de Lagrange. On a deviné l'ordre 2 de l'expression $1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$ tel que le terme $-\frac{14x^3}{81}$ sera obtenu en minorant le reste de Lagrange $\frac{f'''(c)}{3!}x^3$.
En effet on a $f'''(c) = -\frac{28}{27}(1+c)^{\frac{-10}{3}} = -\frac{28}{27}\frac{1}{(1+c)^{\frac{10}{3}}} = -\frac{28}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+c)^{10}}}$

Et on a $0 < \boldsymbol{c} < x \Rightarrow 1 < \mathbf{1}+\boldsymbol{c} < 1+x \Rightarrow 1 < (\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}} < (1+x)^{\frac{10}{3}}$

$$\Rightarrow (1+x)^{\frac{-10}{3}} < (\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{3}}} < 1 \Rightarrow \frac{14x^3}{81}(1+x)^{\frac{-10}{3}} < \frac{14x^3}{81}(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{3}}} < \frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow -\frac{14x^3}{81} < -\frac{\mathbf{14}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{81}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{3}}} < -\frac{14x^3}{81}(1+x)^{\frac{-10}{3}} < 0, \quad \forall x > 0.$$

$$\Rightarrow -\frac{14x^3}{81} < -\frac{\mathbf{14}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{81}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{3}}} < 0 \Rightarrow -\frac{14x^3}{81} < \frac{\boldsymbol{f}'''(\mathbf{c})}{\mathbf{3}!}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} < 0 \ , \quad \forall x > 0.$$

**2$^{\text{ème}}$ exemple** pour montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+, x-\frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$ , on calcule la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au voisinage de 0 ($f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(c)}{2!}x^2$ avec 0<c<x)
de $f(x) = ln(1+x)$ puis on majore et on minore le reste de Lagrange. On a deviné l'ordre 1 de l'expression $x-\frac{x^2}{2}$ tel que le terme $-\frac{x^2}{2}$ sera obtenu en minorant le reste $\frac{f''(c)}{2!}x^2$.
En effet on a $f''(c) = -\frac{1}{(1+c)^2}$.
Et on a $0 < \boldsymbol{c} < x \Rightarrow 1 < \mathbf{1}+\boldsymbol{c} < 1+x \Rightarrow 1 < (\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{2}} < (1+x)^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{2}}} < 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+x)^2} < \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{2}}} < \frac{x^2}{2}$$

$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} < -\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{2}}} < -\frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+x)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} < -\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{c})^{\mathbf{2}}} < 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} < \frac{\boldsymbol{f}''(\mathbf{c})}{\mathbf{2}!}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} < 0$ .

**3$^{\text{ème}}$ exemple**. On veut montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.
Pour montrer $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$ , on calcule la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 (($f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$ avec 0<c<x) de $f(x) = \sin(x)$ puis on on minore le reste de Lagrange.
Et pour montrer $\sin(x) \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$, on calcule la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 (($f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$ avec 0<c<x) de $f(x) = \sin(x)$ puis on majore le reste de Lagrange.
J'espère que je vous ai répondu à votre question. Bon courage.