Corrigé de la Série 1

Exo 1

① $\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \varphi_A(B)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \varphi_A(B)=\varphi_A(A)$ (car $\varphi_A(A)=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$)

$\Leftrightarrow A=B$ car φ_A est bijective

② $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ .... (*) (Relation de Chasles)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ .... (**) (Relation de Chasles)

③ $A+\vec{u}=A+\vec{v} \Leftrightarrow \rho_A(\vec{u})=\rho_A(\vec{v})$

$\Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$ car ρ_A est une bijection.

Exo 2

① Nous avons $\rho_A(\overrightarrow{AP})=\rho_A[\varphi_A(P)]=P$.

Car $\rho_A\circ\varphi_A=id_{\vec{E}}$.

② Soit $A+\vec{u}=B$ et $B+\vec{v}=C$. ($\Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$)

Alors $(A+\vec{u})+\vec{v}=B+\vec{v}=C$ ..... (Δ)

D'autre part $A+(\vec{u}+\vec{v})=A+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=A+(\overrightarrow{AC})$ (Relation de Chasles)

$=C$. (Par ①) .... (ΔΔ)

Par (Δ) et (ΔΔ) : $(A+\vec{u})+\vec{v}=A+(\vec{u}+\vec{v})$.

③ Soit $A+\vec{u}=A'$ et $B+\vec{v}=B'$ (Alors $\vec{u}=\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BB'}$)

Alors $\overrightarrow{(A+\vec{u})(B+\vec{v})}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$ (R. Chasles).

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}$

$=\overrightarrow{AB}+\vec{v}-\vec{u}$.

④ Nous avons $(B+\vec{v})-(A+\vec{u}) \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{(A+\vec{u})(B+\vec{v})}$

$$= \overrightarrow{AB} + \vec{v} - \vec{u} \quad (\text{Par } ③)$$

$$\overset{\text{déf}}{=} B - A + \vec{v} - \vec{u}$$

⑤ $m \in E \Rightarrow m = A + \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM} \in \vec{E}$

$$\Rightarrow m \in A + \vec{E} \quad \ldots\ldots (\top)$$

$m \in A + \vec{E} \Rightarrow m = A + \vec{v}$ pour quelque $\vec{v} \in \vec{E}$

$$\Rightarrow m = \rho_A(\vec{v})$$

$$\Rightarrow m \in E \quad \ldots\ldots (\Downarrow)$$

De ($\top$) et ($\Downarrow$) $\forall m, m \in E \Leftrightarrow m \in A + \vec{E}$.

Donc $\boxed{E = A + \vec{E}}$.

Exo 3

Supposons que $\forall A, B \in E$ $\overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB})$.

Soit $\vec{v} \in \vec{E}$. Alors $\overrightarrow{f(A)f(A+\vec{v})} = h(\vec{v})$ $\left(\overrightarrow{A(A+\vec{v})} = \vec{v}\right)$

$$\Rightarrow f(A+\vec{v}) = f(A) + h(\vec{v}).$$

Alors $\forall A \in E, \forall \vec{v} \in \vec{E}, f(A+\vec{v}) = f(A) + h(\vec{v}) \quad \ldots\ldots (K)$

Supposons que $\forall A \in E, \forall \vec{v} \in \vec{E}, f(A+\vec{v}) = f(A) + h(\vec{v})$.

Soit $B \in E$. Alors $f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + h(\overrightarrow{AB})$

$$\Rightarrow f(B) = f(A) + h(\overrightarrow{AB}) \quad (A + \overrightarrow{AB} = B)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB}).$$

Donc $\forall A, B \in E$ $\overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB}) \quad \ldots\ldots (L)$

De (K) et (L) l'équivalence est prouvée.

Exo 4

Si $\forall A, B \in E$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB})$, alors

$\exists O \in E, \forall B \in E$, $\overrightarrow{f(O)f(B)} = h(\overrightarrow{OB})$ ..... R_1

Supposons que $\exists O \in E, \forall B \in E$, $\overrightarrow{f(O)f(B)} = h(\overrightarrow{OB})$ ..... S

Soit $A \in E$. Alors $\overrightarrow{f(O)f(A)} = h(\overrightarrow{OB})$ ..... T

De S et T :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(A)f(B)} &= \overrightarrow{f(O)f(B)} - \overrightarrow{f(O)f(A)} \\ &= h(\overrightarrow{OB}) - h(\overrightarrow{OA}) \\ &= h(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= h(\overrightarrow{AB}) \quad \text{(Car } h \text{ est linéaire)}\end{aligned}$$

Donc $\forall A, B \in E$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = h(\overrightarrow{AB})$ ..... R_2

De 1 et 2, nous avons équivalence.

Exo 5 Soit
$$F_1 = \{A + \vec{v},\ \vec{v} \in \vec{V}\}$$
$$F_2 = \{P,\ P \in E \text{ et } \overrightarrow{AP} \in \vec{V}\}$$

$$\begin{aligned}P \in F_1 &\Leftrightarrow \exists \vec{v} \in \vec{V},\ P = A + \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists \vec{v} \in \vec{V},\ \overrightarrow{AP} = \vec{v} \\ &\Leftrightarrow P \in E \text{ et } \overrightarrow{AP} \in \vec{V} \\ &\Leftrightarrow P \in F_2\end{aligned}$$

$\forall P$, $P \in F_1 \Leftrightarrow P \in F_2$.

Donc $F_1 = F_2$.