Corrigé de la série 2

19/20

Exo 6

① $G_m = \text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$.

Alors $\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mB} + (m-2)\overrightarrow{G_mC} + m\overrightarrow{G_mD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AB} + (m-2)(\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AC}) + m(\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2m\overrightarrow{AG_m} = \overrightarrow{AB} + (m-2)\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{1}{2m}\left[\overrightarrow{AB} + (m-2)\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AD}\right]$

Alors G_1 et G_2 sont donnés par :

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

② Nous avons $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AG_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AG_2}.$$

Donc G_2 est le milieu de $[G_1, J]$.

③ Nous avons $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} = \frac{m-2}{2m}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AI})$$

$$= \frac{1-m}{m}\overrightarrow{AI} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1-m}{2m}\overrightarrow{AB} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{--- ①}$$

$$\overrightarrow{IG_m} = \overrightarrow{AG_m} - \overrightarrow{AI}$$

$$= \frac{1-m}{2m}\overrightarrow{AB} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{--- ②}$$

De ① et ② : $\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$.

(4) $m\overrightarrow{JG_m} = m\left(\overrightarrow{AG_m} - \overrightarrow{AJ}\right)$

$= m\left(\frac{1}{2m}\overrightarrow{AB} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{AC} + \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \cancel{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{(m-2)}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{m}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

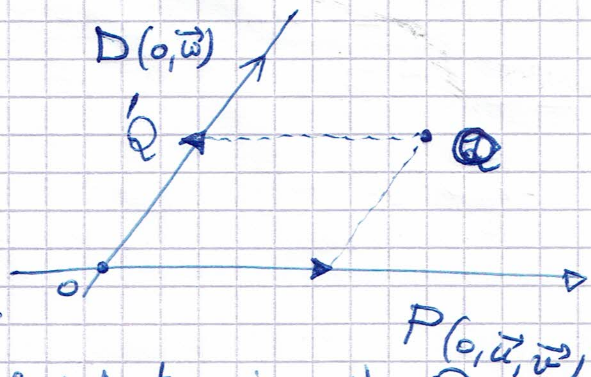
$= \overrightarrow{CI}$.

exo7

(1) $P(O,\vec{u},\vec{v}) = O + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$

$\overrightarrow{OA} = (0,-1,2) = (1,-2,1) + (-1,1,1) = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v}$. Donc $A \in P(O,\vec{u},\vec{v})$.



(2) $D(O,\vec{w}) = O + \mathbb{R}\vec{w}$.

Soit $Q(x,y,z)$.

Soit Q' la projection de Q sur $D(O,\vec{w})$ parallèlement à $P(O,\vec{u},\vec{v})$.

Alors $\overrightarrow{OQ} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ (α,β,γ sont uniques) ... (1)

$\Rightarrow \overrightarrow{OQ'} = \gamma\vec{w}$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & +\gamma \\ -2\alpha & +\beta & -\gamma \\ \alpha & +\beta & +\gamma \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \\ \longrightarrow L_3 \end{array}$

$L_1 + L_2$: $-\alpha = x + y \Rightarrow \alpha = -x - y$ ... (2)

$L_3 - L_1$: $2\beta = -x + z \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ ... (3)

L_3 : $\gamma = z - \alpha - \beta = \frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}z$ ... (4)

Pour $Q = M$ ($M(1,-2,3)$), alors $\alpha = 1$, $\beta = +1$, $\gamma = 1$.

$\overrightarrow{OM'} = \gamma\vec{w} = 1(1,-1,1) = (1,-1,1) \Rightarrow M'(1,-1,1)$.

(3) $\overrightarrow{OM} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OA} + \vec{w}$ avec $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{P(O,\vec{u},\vec{v})}$

$\vec{w} \in \overrightarrow{D(O,\vec{w})}$.

Exo 8

① Soit P_1 le plan d'équation cartésienne $x+y-z+3=0$.

$$x+y-z+3=0 \Leftrightarrow z = x+y+3.$$

Posons $x=\alpha$, $y=\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Alors $M(x,y,z)\in P_1 \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

(Représentation param.)

Soit le point $A(0,0,3)$.

Alors $P_1 = P(A,\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,1,1)$.

Le plan qui passe par $B(0,1,0)$ et parallèle à P_1 est $P(B,\vec{u},\vec{v})$.

Alors $Q(x,y,z)\in P(B,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}$.

$$Q(x,y,z)\in P(B,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow z = x+y-1.$$

② $Q(x,y,z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=-3 & \text{..... ①} \\ 2x+z=2 & \text{..... ②} \end{cases}$

② $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}z+1$

① : $y = -x+z-3$

$= \frac{1}{2}z - 1 + z - 3$ (Remplaçant x par $-\frac{1}{2}z+1$).

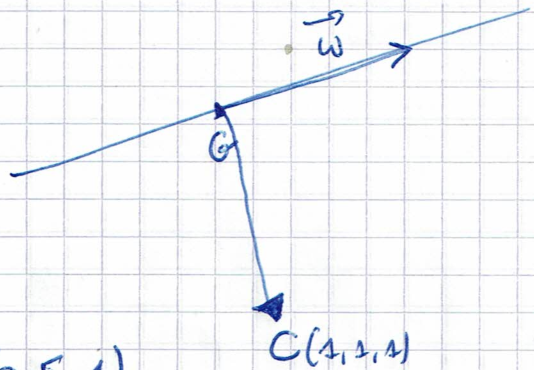
$= \frac{3}{2}z - 4$

Posons $z = 2\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Alors $Q(x,y,z)\in D \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}$ tq $\begin{cases} x-1 = -\alpha \\ y+4 = 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$D = D(G,\vec{w})$, $G(1,-4,0)$, $\vec{w}=(-1,3,2)$.



Nous avons $\overrightarrow{GC} = (0, 5, 1)$.

$Q(x, y, z) \in P(G, \overrightarrow{GC}, \vec{\omega}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GQ}, \overrightarrow{GC}, \vec{\omega}$ sont liés.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - y + 5z - 11 = 0$$

(Le plan P contenait D et passant par C (1, 1, 1) est $P(G, \overrightarrow{GC}, \vec{\omega})$)