Exo 9

1) On effectue l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soient $\vec{u}_1 = (0, 1, 2, 2)$
$\vec{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$
$\vec{u}_3 = (0, 0, -1, 1)$.

$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ ...... (1)

$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - pr_{\vec{v}_1}(\vec{u}_2)$

$= \vec{u}_2 - \dfrac{\langle \vec{v}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$

$= (0, 1, 0, 1) - \dfrac{3}{9}(0, 1, 2, 2)$

$\vec{v}_2 = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ... (2)

$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - pr_{\vec{v}_1}(\vec{u}_3) - pr_{\vec{v}_2}(\vec{u}_3)$

$= \vec{u}_3 - \dfrac{\langle \vec{v}_1, \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \dfrac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$

$= (0, 0, -1, 1) - \dfrac{0}{9}(0, 1, 2, 2) - \dfrac{1}{1}\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\vec{v}_3 = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Normalisant les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, on obtient :

$\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\vec{e}_3 = \dfrac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \left(0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Alors $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de $\vec{F}$.

Exo 10

$Q(x,y,z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

On a la matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdots (1) \\ \cdots (2) \end{array}$$

(1) : $x = -\frac{4}{5} z + \frac{9}{5}$

(2) $y = -\frac{1}{5} z + \frac{1}{5}$

Posons $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $Q(x,y,z) \in D \Leftrightarrow \exists \alpha \begin{cases} x = -\frac{4}{5}\alpha + \frac{9}{5} \\ y = -\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5} \\ z = \alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$. (Pour quelque $\alpha \in \mathbb{R}$).

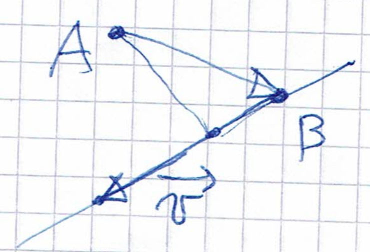
Le vecteur $\vec{v} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)$ est un vecteur directeur de D.

Soit $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Alors $\vec{e} = \left(-\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$.

Le vecteur $\vec{e}$ est unitaire.

$d(A,D) = \left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle \overrightarrow{AB}, \vec{e} \rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $B = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) \in D$.

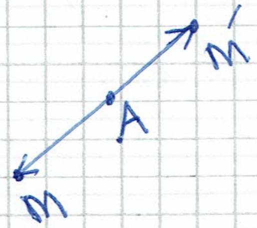
$= \sqrt{\frac{41}{42}}$.



Exo 11

① $S(M) = A + (-\overrightarrow{AM})$ ...... (*)

Soit $S(M) = M'$



Alors (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$

Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$.

$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x \\ b-y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}$$

(La symétrie centrale de centre $A(a,b)$).

② Soit D la droite d'équation $x - y - 1 = 0$.

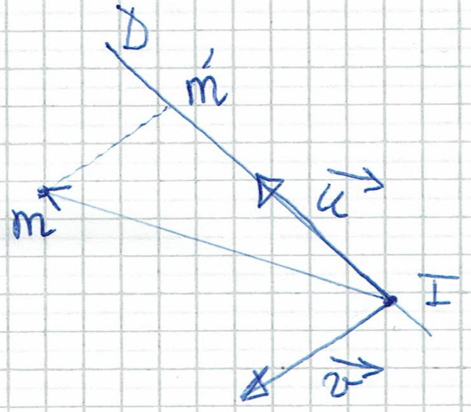
$$Q(x,y) \in D \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \end{cases}, \text{ pour quelque } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pour quelque } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $I(1,0)$ et $\vec{u} = (1,1)$. Alors $D = D(I, \vec{u})$.

Soit $M'(x',y')$ la projection de $M(x,y)$ sur D parallèlement à $\vec{v}$.



$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM'} + \beta \vec{v}$$

$$\overrightarrow{IM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ ... } (\Delta)$$

$$(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \alpha + 2\beta \text{ ..... ①} \\ y = \alpha + \beta \text{ ... ②} \end{cases}$$

①−② $\Rightarrow \beta = x - y - 1$

② $\Rightarrow \alpha = y - \beta$

$\alpha = -x + 2y + 1$ ... ③

$$\overrightarrow{IM'} = \alpha \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 1 = -x + 2y + 1 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2y + 2 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{m'm''} = \mu \, \overrightarrow{m'm} \iff \overrightarrow{Im''} - \overrightarrow{Im'} = \mu\,(\overrightarrow{Im} - \overrightarrow{Im'})$

$\iff \overrightarrow{Im''} = \mu \overrightarrow{Im} + (1-\mu)\overrightarrow{Im'}$

$\iff \begin{pmatrix} x''-1 \\ y'' \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + (1-\mu) \begin{pmatrix} -x+2y+1 \\ -x+2y+1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x'' = (2\mu-1)x + (2-2\mu)y + 1 - 2\mu \\ y'' = (\mu-1)x + (2-\mu)y + 1 - \mu. \end{cases}$

C'est l'expression en coordonnées de a_μ l'affinité de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport μ.

$m(x,y) \longmapsto m''(x'',y'')$.

③ La symétrie par rapport à D dans la direction de $\vec{v} = a_{-1}$

Alors en coordonnées $\begin{cases} x'' = -3x + 4y + 3 \\ y'' = -2x + 3y + 2. \end{cases}$