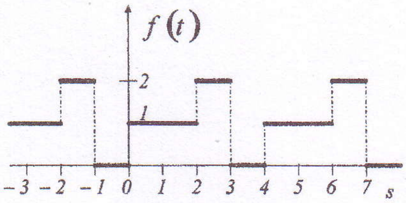
Université A. Mira de Béjaia. Année: 2009/2010.
Faculté de Technologie. Module: Physique 3.
Département LMD: $2^{\acute{e}me}$ Année ST. **EXAMEN DE RATTRAPAGE** Durée: 02 Heures.

Exercice 1 Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.



1. Quelle est la période T de cette fonction.

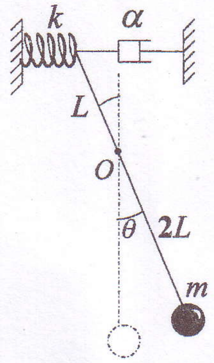
2. Trouver le développement en série de Fourier de cette fonction.

<u>*Rappel*</u>: *La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:*

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin(n\omega t).$$

Exercice 2 Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$

Une tige de longueur $3L$ de masse négligeable porte à son extrémité inférieure une masse m. La tige peut tourner autour du point fixe O. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α. A l'équilibre le ressort était non déformé et la tige était verticale (*représentée en pointillé.*)



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)

2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3. Sachant que m=**1**kg, k=**44**N/m, L=**1**m, α=**40**N.s/m, g=**10**m/s^2 : trouver la nature du mouvement du système.

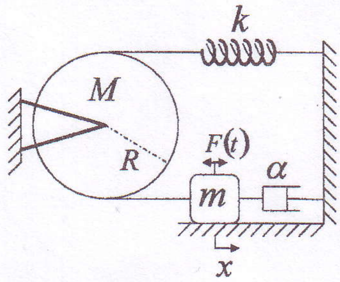
4. Quelle est la valeur maximale que α ne doit pas dépasser pour qu'il y ait oscillations.

5. Lorsque α = **8**N.s/m, le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps τ au bout duquel l'amplitude diminue à **1/5** de sa valeur.

<u>*Rappel*</u>: *Pour* $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système forcé. $\boxed{\text{8 Points}}$

Dans le système ci-contre, le disque de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé. Une excitation sinusoïdale $F(t)$=$F_0\cos\Omega t$ est appliquée sur la masse m.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. (*Pour la variable x.*)

2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3. En utilisant l'équation du mouvement et la représentation complexe, trouver l'amplitude A et la phase ϕ de la solution permanente $x(t)$=$A\cos(\Omega t+\phi)$.

4. Écrire la condition de résonance d'amplitude et donner la pulsation de résonance Ω_R.

5. Donner la facteur de qualité Q et la bande passante B du système (*Amortissement faible.*)

<u>*Rappels*</u>: *Le moment d'inertie du disque autour de son axe est* $I=\frac{1}{2}MR^2$

L'équation de Lagrange du système forcé est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}}+F$.

Université A. Mira de Béjaia.
Faculté de Technologie.
Département LMD: $2^{\acute{e}me}$ Année ST.

Année: 2009/2010.
Module: Physique 3.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE RATTRAPAGE.

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T=4s}$. 0,5

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ 0,5 $= \frac{1}{4}\left[\int_0^2 1.dt + \int_2^3 2.dt + \int_3^4 0.dt\right] = \mathbf{1}.$ 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt$ 0,5 $= \frac{2}{4}\left[\int_0^2 1.cos\frac{\pi nt}{2}dt + \int_2^3 2cos\frac{\pi nt}{2}dt + \int_3^4 0.dt\right] = \frac{2}{\pi\mathbf{n}} sin\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}.$ 0,5

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt$ 0,5 $= \frac{2}{4}\left[\int_0^2 1.sin\frac{\pi nt}{2}dt + \int_2^3 2sin\frac{\pi nt}{2}dt + \int_3^4 0.dt\right]$

$= \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(1 + cos\pi\mathbf{n} - 2cos\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}).$ 0,5

Donc, $f(t) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\mathbf{n}} sin\frac{3\pi\mathbf{n}}{2} cos\mathbf{n}\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(1 + cos\pi\mathbf{n} - 2cos\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}) sin\mathbf{n}\omega t.$ 0,5

Exercice 2

1. $T = \frac{1}{2}m(2L)^2\dot{\theta}^2 = \boxed{2mL^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5 $\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

$U \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mg(2L - 2Lcos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}(kL^2+2mgL)\theta^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = 2mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2+2mgL)\theta^2.$

$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \frac{kL+2mg}{4mL}\theta = 0.}$ 0,5

3. L'équation est de la forme: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{8m}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{kL+2mg}{4mL}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $= \boxed{9\ rad^2.s^{-2} > 0.}$ 0,5 Le mouvement est donc $\boxed{\textbf{apériodique.}}$ 0,5

4. Pour qu'il y ait oscillations, il faut que $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0.}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\alpha < 4\sqrt{\frac{m(kL+2mg)}{L}}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\alpha < \mathbf{32}\ N.m^{-1}.s.}$ 0,5

5. $\boxed{Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\lambda t}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\lambda\tau = \ln 5}$ 0,5 $\Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda}.$

A.N: Pour $\alpha = 8N.m^{-1}.s$: $\boxed{\lambda = \mathbf{1}\ s^{-1}.}$ 0,5 $\Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\mathbf{1}} \approx \boxed{\mathbf{1{,}6\ s.}}$ 0,5

Exercice 3

1. $T = T_M + T_m = \boxed{\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$ 0,5 $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)\dot{x}^2.$ $\boxed{\text{(Car } x=R\theta.)}$ 0,5

$U = U_k = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}kx^2.}$ 0,5 $\mathcal{D} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}} + F \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2\alpha}{2m+M}\dot{x} + \frac{2k}{2m+M}x = \frac{2F}{2m+M}.}$ 1

L'équation est de la forme: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2F}{2m+M}$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2m+M}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{2k}{2m+M}.}$ 0,5

3. En utilisant la représentation complexe

$\boxed{\begin{array}{l} F_0 cos(\Omega t) \longrightarrow \underline{F} = F_0 e^{j\Omega t} \\ x = Acos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}e^{j\Omega t}\end{array}}$ 0,5 $\Rightarrow \ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{2F}{2m+M} \Rightarrow \boxed{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega)\underline{A} = \frac{2F_0}{2m+M}}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\underline{A} = \frac{2F_0/(2m+M)}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{A = \frac{2F_0/(2m+M)}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}}$ 0,5 et $\boxed{tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$ 0,5

4. La condition de résonance d'amplitude est $\boxed{\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0}$ 0,5, la pulsation est $\Omega_R = \boxed{\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$ 0,5

5. Le facteur de qualité du système est $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}}$ 0,5, la bande passante est $\boxed{B \approx 2\lambda.}$ 0,5