S.T Université A.MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Année : 2ème LMD-ST

® 20 septembre 2010

Examen Maths $\widetilde{IV}$

Exercice 1 :(07.00 pts) La mesure en cm^3 du volume des éléments figurés dans 100 cm^3 de sang a été effectuée chez 100 sujets. On a eu

Vol x	[38.5 , 39.5[	[39.5, 40.5[	[40.5, 41.5[	[41.5, 42.5[	[42.5, 43.5[	[43.5, 44.5[	[44.5, 45.5[
$F_i \nearrow$	0.03	0.13	0.36	0.64	0.84	0.95	1

1. Quelle est la nature de la variable étudiée.
2. Donner la distribution de cette variable et sa représentation graphique.
3. Tracer la courbe cumulative croissante. Donner la fonction de répartition.
4. Quelle est la fréquence des individus ayant un volume entre 40 et 42.5 cm ^{3}.
5. Calculer la moyenne, l'écart type et l'intervalle interquartile.

Exercice 2 : (09.00 pts) Soit la série double (X,Y) définie par les 10 observations (x_i, y_i) suivantes :

x_i	2	4	5	7	10	11	14	14	17	18
y_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17

1. Construire le nuage de points.
2. Déterminer le coefficient de corrélation. Vous parait-il raisonnable d'ajuster au nuage de points une droite de régression de Y en X ?
3. On pose $U = X^2$ et $V = Y$, calculer les 10 couples (u_i, v_i) et représentez-les graphiquement par un nuage de points.
4. Calculer la variance de U, la variance de V et la covariance de (U,V).
5. Ajuster au nuage de points (u_i, v_i) une droite de régression de V en U en déterminant son équation. En déduire la courbe de régression de Y en X.
6. Estimer la valeur de Y pour X=0 et X=10.

Exercice 3 :(02.00 pts) On a trouvé le coefficient de corrélation $\rho^2 = 1$ et $y = 2x + 5$ pour la droite de régression de Y en X. Quelle est l'équation de la droite de régression de X en Y ?

Exercice 4 :(02.00 pts) Le clavier d'une machine comporte 42 touches, dont 8 chiffres et 26 lettres. on frappe au hasard. Sachant que les touches sont équiprobables, calculer les probabilités suivantes :

a) De taper une lettre ;
b) De taper une suite de 5 lettres ;
c) De taper le mot "courage".

Bon courage

Corrigé du rattrapage de Statistique (MATH4) 2010.
et Probabilité

Exercice 1 : 7

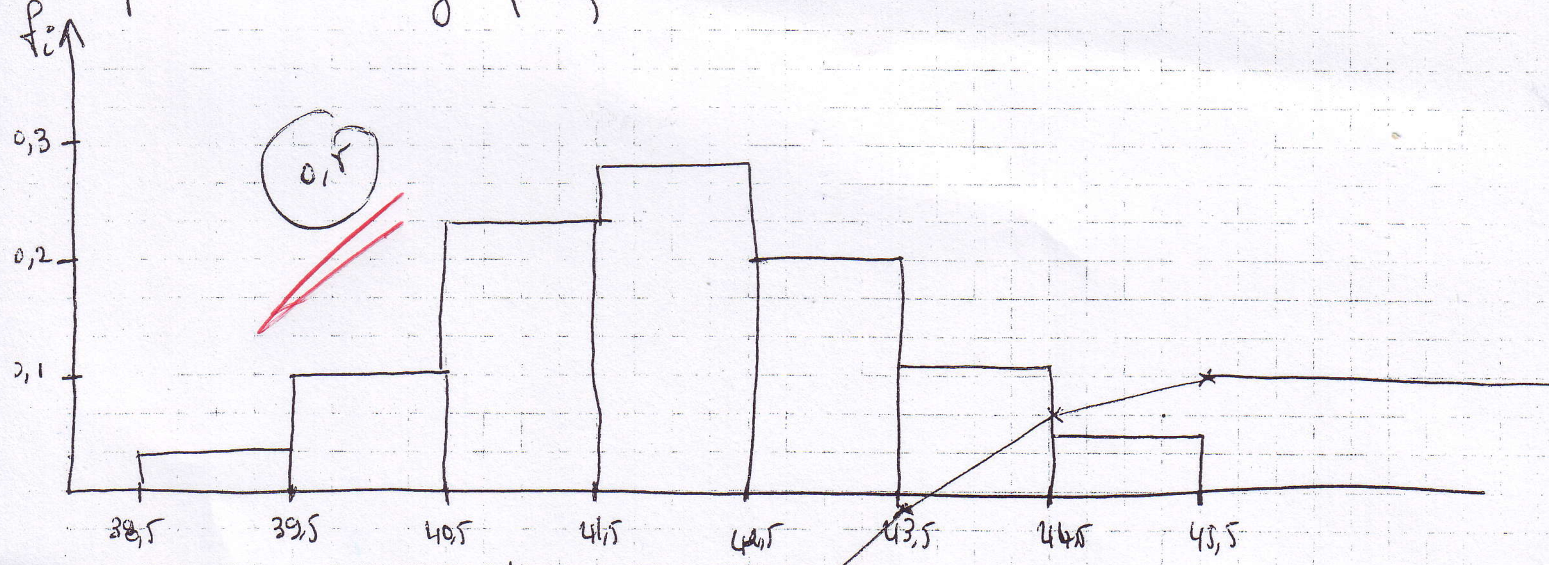
1/ Nature de la variable : quantitative continue. 0,5

2) Distribution

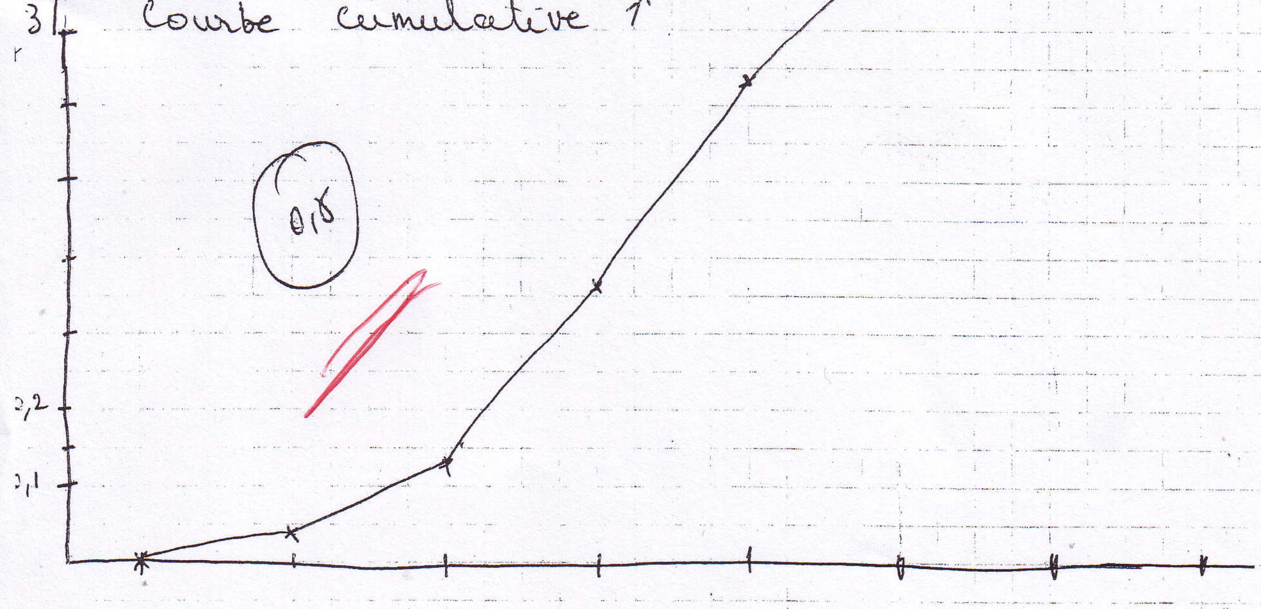
Vol	[38,5 39,5[	[39,5 40,5[	[40,5 41,5[	[41,5 42,5[	[42,5 43,5[	[43,5 44,5[	[44,5 45,5[
n_i	3	10	23	28	20	11	5
f_i	0,03	0,10	0,23	0,28	0,20	0,11	0,05
$F_i\uparrow$	0,03	0,13	0,36	0,64	0,84	0,95	1
x_i	39	40	41	42	43	44	45
y_i	0	1	2	3	4	5	6
$n_i y_i$	0	10	46	84	80	55	30
$n_i y_i^2$	0	10	92	252	320	275	180

0,5

Representation graphique.



3/ Courbe cumulative ↑



P1

Fonction de repartition.

$F(x) = \frac{f_i}{l_i}(x - a_i) + F_{i-1}$ pour $x \in [a_i \; a_{i+1}[$.

$l_i = a_{i+1} - a_i = 1$ amplitude égale des classes.

si $x < 38,5$ $\quad F(x) = 0$ $\quad$ 2

$x \in [38,5 \quad 39,5[\quad F(x) = 0,03(x - 38,5) \cancel{+0,03} = 0,03x - 1,155$

$x \in [39,5 \quad 40,5[\quad F(x) = 0,1(x - 39,5) + 0,03 = 0,1x - 3,92$

$x \in [40,5 \quad 41,5[\quad F(x) = 0,23(x - 40,5) + 0,13 = 0,23x - 9,285$

$x \in [41,5 \quad 42,5[\quad F(x) = 0,28(x - 41,5) + 0,36 = 0,28x - 11,56$

$x \in [42,5 \quad 43,5[\quad F(x) = 0,2(x - 42,5) + 0,64 = 0,2x - 7,86$

$x \in [43,5 \quad 44,5[\quad F(x) = 0,11(x - 43,5) + 0,84 = 0,11x - 37,7$

$x \in [44,5 \quad 45,5[\quad F(x) = 0,05(x - 44,5) + 0,95 = 0,05x - 21,30$

$x \geq 45,5 \quad F(x) = 1$

4/ Frequence des inds ayant un volume $\in [40, 42,5[= F$

$F = F(42,5) - F(40) = 0,64 - 0,1(40 - 39,5) + 0,03$

$= 0,64 - 0,05 + 0,03 = 0,64 - 0,02 = 0,52$ $\quad$ 0,5

5) Moyenne, ecart-type et ecart interquartiles

On pose $y_i = x_i - 39$ alors $\bar{Y} = \bar{X} - 39 \Rightarrow \bar{X} = \bar{Y} + 39$.

$\bar{Y} = \frac{\sum n_i y_i}{100} = 3,05 \Rightarrow \bar{X} = 3,05 + 39 \boxed{= 42,05}$ $\quad$ 0,5

$Var(Y) = Var(X) = \frac{\sum n_i y_i^2}{100} - (3,05)^2 = 11,29 - 9,3025 = 1,9875$

$\boxed{\sigma_X = \sqrt{1,9875} \simeq 1,}$ $\quad$ 0,5

Ecart interquartile $E = Q_3 - Q_1$

$Q_3 = ?$ $\quad Q_3 \in [42,5 \quad 43,5[$.

$Q_3 = 42,5 + \frac{0,75 - 0,64}{0,2} = 42,5 + 0,55 = \cancel{42,555}$ 43,05

$Q_1 \in [40,5 \quad 41,5[$.

$Q_1 = 40,5 + \frac{0,25 - 0,13}{0,23} = 40,5 + 0,521 = \underline{41,021}$

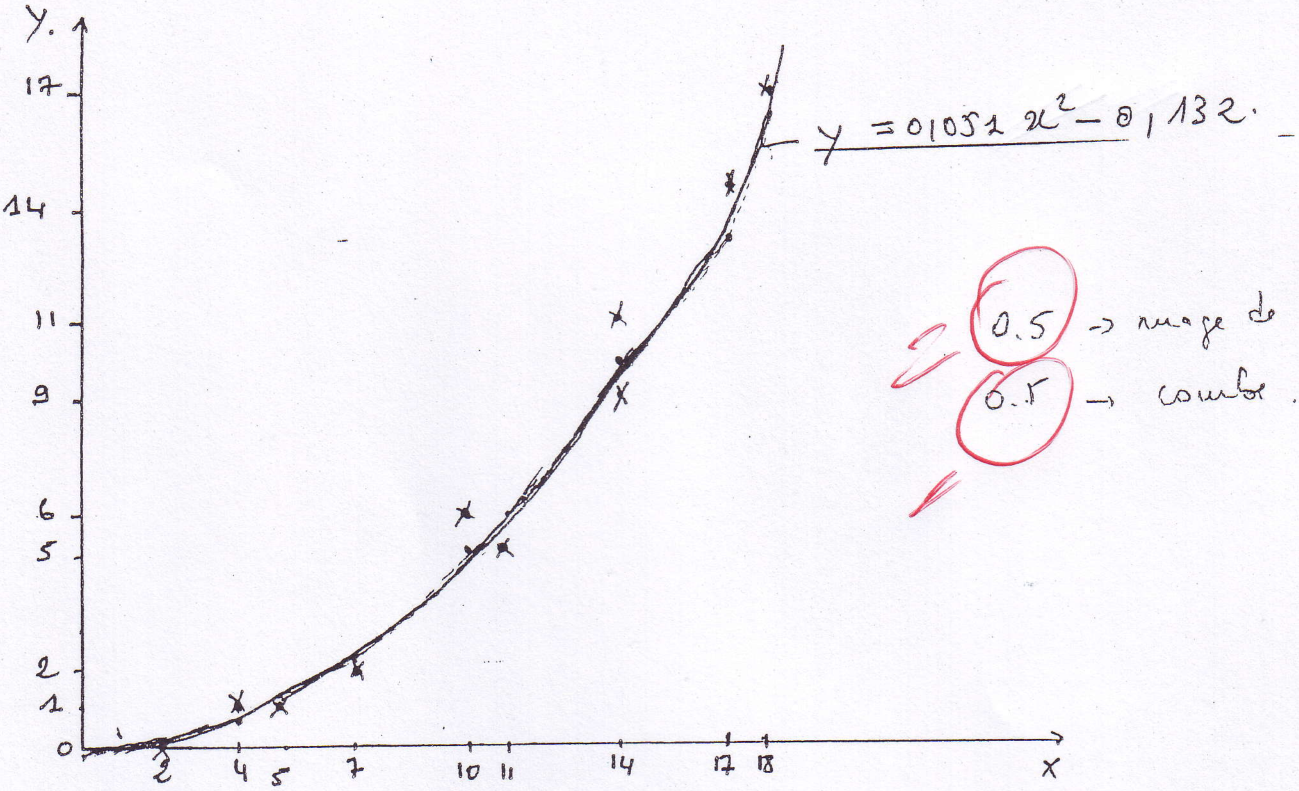
$E = 43,050 - 41,021 \boxed{= 2,03}$

1,5

P2

Exercice n° 2. (9 pts).

1)- Le nuage de point :



0.5 → nuage de pts
0.5 → courbe

2/ Le coefficient de corrélation :

											Total.
x_i	2	4	5	7	10	11	14	14	17	18.	102
y_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17.	6.6
x_i^2	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324	1320
y_i^2	0	1	1	4	36	25	81	121	196	289.	754
x_iy_i	0	4	5	14	60	55	126	154	238	306	962

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \, \sigma_y}.$$

$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 102 = 10{,}2$ 0.5 , $\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}\, 66 = 6{,}6.$ 0.5

$var(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{10} \cdot 1320 - (10{,}2)^2 = 132 - (10{,}2)^2 = 132 - 104{,}04 = 27{,}96.$

$\sigma_x = \sqrt{var\,x} = \sqrt{27{,}96} = 5{,}287$ 0,75

P3

$Var(y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{10} \cdot 754 - (6{,}6)^2 = 75{,}4 - 43{,}56 = 31{,}84.$

$\sigma_y = \sqrt{var\,y} = \sqrt{31{,}84} = 5{,}642$ 0,75

$cov(x,y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{\bar{x}}\,\bar{\bar{y}} = \frac{1}{10} 962 - (6,6 \times 10,2) = 28,88$ (0.5)

$r = \rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{28,88}{5,287 \times 5,642} = 0,968$ (0.5)

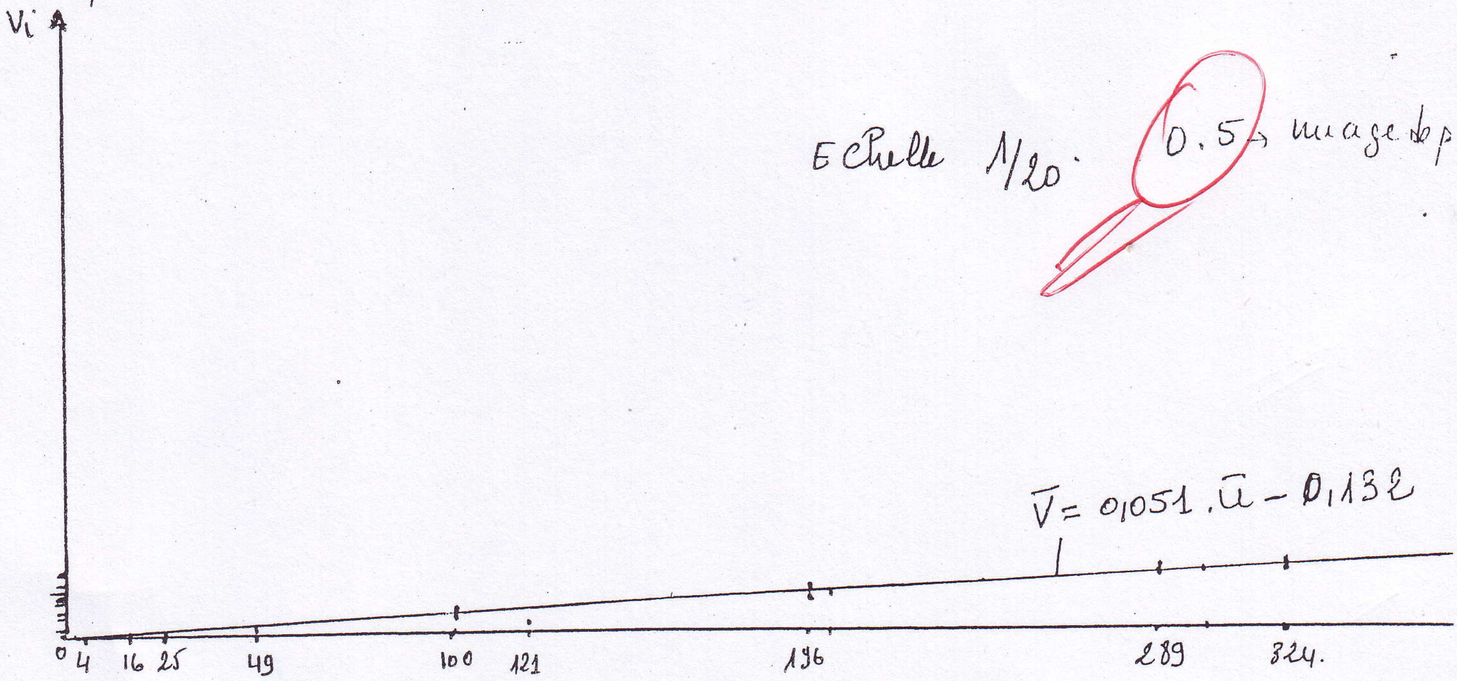
3/ La Correlation entre x et y est très forte ~~mais il n'est pas raisonnable de lui ajuster une droite de regression de y en Car les points du nuage ne sont pas alignés.~~ (0.5)

4/ determination des couples de points (u_i, v_i).

u_i	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324.
v_i	0	1	1	2	6	5	9	11	14	17.

(0.5)

Representation du nuage de point (u_i, v_i).



5/ Ajustement par une droite de regression :

et 6/ L'equation est de la forme $\bar{v} = a\bar{u} + b$.

$a = \frac{Cov(u,v)}{Var(u)}$.

											Total
u_i	4	16	25	49	100	121	196	196	289	324.	1320
v_i	0	1	1	6	6	5	9	11	14	17	66
u_i^2	16	256	625	2401	10.000	14.641	38 416	38416.	83521	104976.	293.2
v_i^2	0	1	1	4	36	25	81	121	196	289	754
$u_i v_i$	0	16	25	98	600	605	1764	2156	4046	5508	14818

$$a = \frac{\mathrm{cov}(u,v)}{\mathrm{Var}\, u}.$$

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i = \frac{1}{10}\, 1320 = 132. \\ \bar{V} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} v_i = \frac{1}{10}\, 6{,}6 = 6{,}6. = \bar{y} \end{cases}$$ (0.25)

$$\begin{cases} \mathrm{var}(u) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i^2 - \bar{u}^2 = \frac{1}{10}(293268) - 17424 = 11902{,}8. \\ \mathrm{Cov}(u,v) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i v_i - \bar{u}\bar{v} = \frac{1}{10} \cdot 14878 - (132 \times 6{,}6) - 610{,}6. \end{cases}$$ (0.5) (0.5)

$$a = \frac{\mathrm{cov}(u,v)}{\mathrm{Var}(u)} = \frac{610{,}6}{11902{,}18} = 0{,}051$$ (0.25)

$$b = \bar{V} - a\bar{u} = 6{,}6 - 0{,}051 \cdot 132 = -0{,}132.$$ (0.25)

l'equation de la droite de regression de V en U est :

$$\underline{\hat{V} = 0{,}051 \cdot \hat{u} - 0{,}132.}$$ (0.25)

7) l'equation de la courbe de regression de y en x.

on a : $\hat{V} = 0{,}051\, u - 0{,}132.$ ①

d'autre part :

$V = y$ et $u = x^2$ ②

d'après ① et ② on aura :

$$\underline{y = 0{,}051 \cdot x^2 - 0{,}132.}$$ (0.5)

La courbe de regression sur le nuage de point (x_i, y_i)

x_i	2	4	5	7	10	11	14	14	17	18
y_i	0,072	0,684	1,143	2,367	4,968	6,039	9,864	9,864	14,607	16,392

8/ Estimation de valeur de y pour $x = 0$ et $x = 10$ ~~...~~

X	0	10	~~20~~
Y	-0,132	4,968	~~20,268~~

(0.5)

P05

Exercice N° 03

$\rho^2 = 1$

Rapel : La droite de regression de y en x : $y = ax + b$.
La droite de regression de x en y : $x = \alpha y + \beta$

$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$, avec $y = 2x + 5 \Rightarrow a = 2$ et $b = 5$.

$$\rho^2 = \left[\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}\right]^2 = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} \times \frac{cov(x,y)}{V(y)} = a \times \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}}$$ (Car $a = 2$). 1

On a aussi :

$$\begin{cases} \beta = \bar{x} - \alpha \bar{y} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y} \Rightarrow 2\beta = 2\bar{x} - \bar{y} \\ 5 = \bar{y} - 2\bar{x} \Rightarrow \bar{y} = 2\bar{x} + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\beta = 2\bar{x} - (2\bar{x} + 5) = -5$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{-5}{2}}$$ 1

En Conclusion : $\boxed{x = \alpha y + \beta = \frac{1}{2} y - \frac{5}{2}}$

P06

Exercice N° 04

1°/ Il y a 42 façons différentes de taper une touche, et il y a 26 façons différents de taper une lettre quelconque, alors la probabilité de taper une lettre est égale à

a- $P_1 = \frac{26}{42} = 0,62$

0,5

2°/ On admet que l'on peut taper plusieurs fois la même touche. Alors la probabilité de taper une suite de 5 lettres est :

b- $P_2 = \left[\frac{26}{42}\right]^5 = 0,09$

0,5

3°) La probabilité de taper une lettre déterminée (par exple 'o') est :

$P_3 = \frac{1}{42}$

0,5

alors la probabilité de taper le mot "courage" est

c- $P_4 = \left[\frac{1}{42}\right]^7 = 0,43 \times 10^{-11}$

0,5

2

P07