Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Novembre 2020

Corrigé de l'examen de MathsII

Exercice 1. (5 points)
Calculons les deux intégrales suivantes :

1. $\int \dfrac{\ln x}{x(1-ln^2x)}dx.$

   On pose : $t = \ln x$, donc $dt = \dfrac{1}{x}dx$
   Alors
   $\int \frac{\ln x}{x(1-ln^2)x}dx = \int \dfrac{t}{(1-t^2)}dt$
   $= -\dfrac{1}{2}\int \frac{-2t}{(1-t^2)}dt$
   $= -\dfrac{1}{2}ln|1-t^2| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$
   $= -\dfrac{1}{2}ln|1-(ln\ x)^2| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

2. $\int(2x+1)e^{-x}dx$, intégration par parties

$$g(x) = 2x+1 \Longrightarrow g'(x) = 2.$$
$$f'(x) = e^{-x} \Longrightarrow f(x) = -e^{-x}$$

   Donc
   $\int(2x+1)e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} - \int -2e^{-x}dx$
   $= -(2x+1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx$
   $= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$
   Finalement,

$$\int (2x+1)e^{-x}dx = -(2x+3)e^{-x} + C$$

   où $C \in \mathbb{R}$

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminons les constantes réelles a et b qui vérifient : $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}.$

   On a $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x} = \dfrac{a+(b-a)x}{x(1-x)}$
   En identifiant, on obtient : $a = 1$ et $b = 1$.
   donc $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}.$

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{1-x}$;
$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$
et
$\int \frac{1}{1-x}dx = -ln|1-x| + c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$
On déduire la primitive de la fonction $\frac{1}{x(1-x)}$.
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1-x)}dx &= ln|x| + c_1 - ln|1-x| + c_2\\ &= ln|\frac{x}{1-x}| + C, \qquad C = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. **Résoulution de l'équation différentielle suivante :** $y' - y = \frac{e^x}{x(x-1)} \qquad (E).$
Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0 \qquad (EH)$
Pour $y \neq 0$
$$y' - y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = dx$$
et par suite
$$ln|y| = x + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$
D'où
$$y(x) = Ce^x, \qquad C = \mp exp(C1) \in \mathbb{R}^*$$
$y = 0$ est une solution évidente de (EH) : Finalement, la solution générale de (EH) est
$$y(x) = ke^x; \;\; k \in \mathbb{R}$$
.
Résolution de l'équation avec second membre $(y' - y = \frac{e^x}{x(x-1)})$
Méthode de la variation de la constante :
Soit $y(x) = Ke^x$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K, et la solution générale de l'équation avec le second membre (E) sera : $y(x) = K(x)e^x$.
On a $y'(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x$. En remplaçant y et y' dans l'équation (I), on obtient
$$K'(x) = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(1-x)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$
par conséquent
$$K(x) = -ln|x| + ln|x-1| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}$$
$$K(x) = ln|\frac{x-1}{x}| + C', \qquad C' \in \mathbb{R}$$
Finalement la solution générale de l'équation (E) est
$$y(x) = (ln|\frac{x-1}{x}| + C')e^x, \qquad C' \in \mathbb{R}$$
.

4. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 2y' + y = e^x ....(E)$$

Résolution de l'équation homogène

$$y'' + 2y' + y = 0$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = 0...(1)$$

admet une racine réelle double $r = -1$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$m = 1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (1), donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :
$y_p(x) = P_0(x)e^x$ avec $P_0(x) = A$.
c-à-d : $y_p(x) = Ae^x, \quad A \in \mathbb{R}$

$$y_p'(x) = Ae^x \quad et \quad y_p''(x) = Ae^x$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y_p' et de y_p'' ; on obtient
$(E) \Longrightarrow Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = e^x$
$\Longrightarrow 4Ae^x = e^x$
Par identification, on trouve $A = \frac{1}{4}$
D'où, une solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = \frac{1}{4}e^x$$

Finalement,

$$y_G(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. (9 points)

I. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice A. Il vient, en développant par rapport à la troisième ligne.

$$det(A) = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

b. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(A) = -1 \neq 0$. Calculons l'inverse de A, on a $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t(com(A))$.

$$com(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad donc \qquad {}^t(com(A)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Déduire la solution du système suivant :

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$