1ère année ST.

2019/2020.

Corrigé : Examen de Remplacement :

- MATHS 2 -

1 **Exercice ①:**

1. On décompose en éléments simples :

$x \neq 0$:
$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(1+x^2)^2} + \frac{dx+e}{(1+x^2)}.$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+d=0 \\ 2a+b+d=0 \\ c+e=0 \\ e=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=-1. \\ c=e=0. \\ b=-1. \\ b+d=-2. \end{cases}$$

2 pt

Donc :
$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{(1+x^2)}.$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx - \int \frac{x}{(1+x^2)}\,dx.$$
$$= \ln|x| - \frac{-1}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Conclusion :

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)^2}\,dx = \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

② Une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}. \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} + \underbrace{\int x e^{-2x}\,dx}_{J}.$$

On intègre J par partis :

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1. \\ g(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}. \end{cases}$$

2,8

$$\Rightarrow J = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right] + C, \quad \underline{C \in \mathbb{R}}.$$

$$J = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C.$$

Remplacer J dans I :

$$I = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \underline{C}.$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x}\left[x^2 + x + \frac{3}{2}\right] + C.$$

<u>Conclusion</u> :

$$I = \int (x^2+1) e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right) + C.$$

(2) **Exercice (2)** : • Par identification, il résulte :

$a = 1,\ b = 2.$

Donc : $\dfrac{3x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1}$ $(x \neq +1 \text{ et } 0)$.

1

•• $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. 0,1

• $\displaystyle\int \frac{2}{x-1}\,dx = 2\ln|x-1| + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$. 0,1

$= \ln(x-1)^2 + C_2.$

$\longrightarrow \displaystyle\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,dx = \ln|x| + \ln(x-1)^2 + C$ / $C = C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$.

$= \ln\left(|x| \cdot (x-1)^2\right) + C$ 0,1

••• Résoudre l'éq. diff :

$x(x-1)y' - (3x-1)y = -x(x-1)^2(3x-1)$ ...... (E).

Sous forme normalisée, pour $x \neq \{0,1\}$, on a :

$(E) \iff y' - \dfrac{3x-1}{x(x-1)}\,y = -(x-1)(3x-1)$: éq. linéaire du 1er ordre avec second membre.

L'éq. homogène associée est :

$$y' - \frac{3x-1}{x(x-1)}\,y = 0 \quad \text{---} \quad (E_0).$$

$y = 0$: Sol. triviale de (E_0).

$y \neq 0$:

$(E_0) \iff \dfrac{y'}{y} = \dfrac{3x-1}{x(x-1)}$

$\iff \displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dy = \int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,dx$ ✓ 0,1

$\iff \ln|y| = \ln\left(|x| \cdot (x-1)^2\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow |y| = C_1 \cdot |x| \cdot (x-1)^2 \;/\; C_1 = e^{C} > 0$.

$\Rightarrow \boxed{y_0(x) = k \cdot x(x-1)^2 ,\; k = \pm C_1 \in \mathbb{R}.}$ c'est la Solution générale de (E_0).

Recherche d'une sol. particulière de (E):

La méthode de la variation de la Constante donne une sol. particulière de (E) Sous la forme:

$$y_1(x) = k(x) \cdot x\,(x-1)^2 \quad 0{,}5$$

$$\longrightarrow y_1'(x) = k'(x) \cdot x(x-1)^2 + k(x)\left[(x-1)^2 + 2x(x-1)\right]$$

$$= k'(x) \cdot x(x-1)^2 + k(x)(x-1)^2 + 2x \cdot k(x)(x-1).$$

On remplace dans (E):

$$(E) \Leftrightarrow y_1' - \frac{3x-1}{x(x-1)}\, y_1 = -(x-1)(3x-1).$$

$$\Leftrightarrow k'(x) \cdot x(x-1)^2 + k(x)\cancel{\left[(x-1)^2 + 2x(x-1)\right] - k(x)(3x-1)(x-1)}$$

$$= -(x-1)(3x-1).$$

$$\Leftrightarrow k'(x) = -\frac{3x-1}{x(x-1)} \longrightarrow k(x) = -\int \frac{3x-1}{x(x-1)}\,dx.$$

$0{,}5$

$$= \ln\left[\frac{1}{|x| \cdot (x-1)^2}\right].$$

Donc: $\boxed{y_1(x) = \ln\left[\frac{1}{|x| \cdot (x-1)^2}\right] x(x-1)^2}$

Enfin, La solution générale de (E) est:

$$y_G(x) = y_0(x) + y_1(x) = x(x-1)^2 \cdot \left[k + \ln \frac{1}{|x| \cdot (x-1)^2}\right],\; k \in \mathbb{R}$$

$0{,}5$

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (2x-1)e^{x} \quad \ldots\ldots (E) \\ \\ y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \ldots\ldots (E_0) \end{cases}$$

L'eq. Caractéristique associée à (E_0) est:

(E_c) : $r^2 - 3r + 2 = 0 \iff (r-1)(r-2) = 0$ 0,5

$\implies r_1 = 1$ ou $r_2 = 2$.

$\rightarrow$ La Solution générale de (E_0) est:

$$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \; / \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$ 1

• Recherche d'une Solution particulière de (E) :

$\alpha = 1$ est une racine Simple de (E_c). Alors ; une Solution particulière de (E) sera :

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x \cdot P_1(x) \cdot e^{x} \\ &= x(ax+b)e^{x} \quad / \; (a \neq 0). \\ &= (ax^2 + bx) \cdot e^{x}. \end{aligned}$$ 0,5

$\rightarrow y_1'(x) = (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx) \cdot e^{x}$.

$y_1''(x) = 2a e^{x} + (2ax+b)e^{x} + (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx) \cdot e^{x}$.

On remplace dans (E) :

$(E) \iff y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = (2x-1)e^{x}$

$\iff (ax + (2a-b))e^{x} = (2x-1)e^{x}$ après Simplification.

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 5. \end{cases}$$

$$y_1(x) = (2x+5x)e$$

Enfin, la solution générale de (E) est :

$$y_G(x) = y_0(x) + y_1(x).$$
$$= C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (2x^2+5x)e^{x} \;/\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1

• Exercice ③ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ -5 & -2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

a/ $\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & \alpha \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & \alpha \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$ / P/t à la 1ère ligne.

$$= \alpha^2 + 4 - (-2 + 5\alpha).$$
$$= \alpha^2 - 5\alpha + 6 = (\alpha-2)(\alpha-3).$$

1,5

b/ A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

$$\iff (\alpha-2)(\alpha-3) \neq 0.$$
$$\iff \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}.$$

1,5

c/ Pour $\alpha = 1$: A est inversible car $\det(A) = 2 \neq 0$.

L'inverse de A se donne par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t\mathrm{Com}(A)$$

$$\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}5 & -11 & 3\\ 2 & -4 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\ 1 \quad ; \quad {}^t\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ -11 & -4 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ -11 & -4 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & 1 & 1/2\\ -11/2 & -2 & -3/2\\ 3/2 & 1 & 1/2\end{pmatrix}.\ 1$$

d/ Le système s'écrit sous forme matricielle:

$$A.X=B \iff X=A^{-1}.B.$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & 1 & 1/2\\ -11/2 & -2 & -3/2\\ 3/2 & 1 & 1/2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -5\\ 1\end{pmatrix}.\ 2{,}5$$

FIN.