Université A/ Mira de Béjaia — Décembre 2020
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Corrigé de l'examen de rattrapage de MathsII

Exercice 1. (8 points)

I. On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculons le déterminant de la matrice B. Il vient, en développant par rapport à la première ligne.

$$det(B) = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \text{-1} & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \text{-1} & 1 \end{vmatrix} = 3$$

b. La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, On a $det(B) = 3 \neq 0$ donc A inversible. Calculons l'inverse de A, on a $B^{-1} = \frac{1}{det(B)}{}^t(com(B))$.

$$com(B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad donc \qquad {}^t(com(B)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c. Résoudre avec deux méthodes différentes le système linéaire suivant :

– par la méthode de la matrice inverse

$$\begin{cases} -y + z & = 1 \\ x + y + z & = 2 \\ -x + y & = -1 \end{cases}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

– méthode de Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{det(B)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

et donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (7 points)

1. Déterminons les constantes réelles a et b qui vérifient : $\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2x-1}$.

   On a $\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{2ax - a + bx}{x(2x-1)}$
   $= \frac{(2a+b)x - a}{x(2x-1)}$

   En identifiant, on obtient : $a = -1$ et $b = 2$.

   donc $\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{2x-1}$.

2. Trouver les primitives des fonctions $\frac{a}{x}$ et $\frac{b}{2x-1}$;

   $\int \frac{-1}{x} dx = -ln|x| + c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$

   et

   $\int \frac{2}{2x-1} = ln|2x-1| + c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$

   En déduire la primitive de la fonction $\frac{1}{x(2x-1)}$.

   $$\int \frac{1}{x(2x-1)} = -ln|x| + c_1 + ln|2x-1| + c_2$$
   $$= ln|\frac{2x-1}{x}| + C, \qquad C = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$$

3. **Résoulution de l'équation différentielle suivante :**

   $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = \frac{1}{2x-1} \qquad (E).$

   On a

$$(E) \Longleftrightarrow y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{(2x-1)x(1+\ln^2(x)} \qquad (E1)$$

Résolution de l'équation homogène $y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))} = 0 \qquad (EH)$
Pour $y \neq 0$

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}dx$$

et par suite

$$ln|y| = -ln|1+\ln^2(x)| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

D'où

$$y(x) = C\frac{1}{1+\ln^2(x)}, \qquad C = \mp e^{c_1} \in \mathbb{R}^*$$

$y = 0$ est une solution évidente de (EH). Finalement, la solution générale de (EH) est

$$y(x) = K\frac{1}{1+\ln^2(x)}; \quad K \in \mathbb{R}$$

.

Résolution de l'équation avec second membre ($y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{(2x-1)x(1+\ln^2(x)}$)
Méthode de la variation de la constante :
Soit $y(x) = K\frac{1}{1+\ln^2(x)}$ la solution générale de l'équation homogène. On fait varier la constante K, et la solution générale de l'équation avec second membre (E1) sera : $y(x) = K(x)\frac{1}{1+\ln^2(x)}$.
On a $y'(x) = K'(x)\frac{1}{1+\ln^2(x)} + K(x)\frac{-2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))^2}$. En remplaçant y et y' dans l'équation (E1), on obtient

$$K'(x) = \frac{1}{x(2x-1)}$$

Donc
$K(x) = \int \frac{1}{x(2x-1)}dx$
par conséquent

$$K(x) = ln|\frac{2x-1}{x}| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Finalement la solution générale de l'équation (E1) est

$$y(x) = \frac{ln|\frac{2x-1}{x}| + C}{1+\ln^2(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

4. Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$2y'' + y' - y = 4e^{\frac{1}{2}x} \ldots .(E)$$

Résolution de l'équation homogène

$$2y'' + y' - y = 0$$

L'équation caractéristique

$$2r^2 + r - 1 = 0...(1)$$

admet une racine réelle double $r = -1$ et $r = \frac{1}{2}$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$m = \frac{1}{2}$ est une racine de l'équation caractéristique (1), donc on cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_p(x) = P_0(x) x e^{\frac{1}{2}x}$$

avec $P_0(x) = A$.
c-à-d : $y_p(x) = Axe^{\frac{1}{2}x}, \quad A \in \mathbb{R}$

$$y_p'(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}Axe^{\frac{1}{2}x} = (A + \frac{1}{2}Ax)e^{\frac{1}{2}x}$$

et

$$y_p''(x) = \frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(Ae^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}Axe^{\frac{1}{2}x}) = (A + \frac{1}{4}Ax)e^{\frac{1}{2}x}$$

En substituant dans l'équation (E) les expressions de y_p' et de y_p'' ; on obtient
$(E) \Longrightarrow 2Ae^{\frac{1}{2}x} = 4e^{\frac{1}{2}x}$
Par identification, on trouve $A = \frac{4}{3}$
D'où, une solution particulière y_p de (E) est

$$y_p(x) = \frac{4}{3}xe^{\frac{1}{2}x}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} y_G(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{4}{3}xe^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ &= C_1 e^{-x} + (C_2 + \frac{4}{3}x)e^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. (5 points)
Calculons les deux intégrales suivantes :

1. $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x dx.$
   On peut utiliser l'intégration par parties trois fois pour calculer $\int (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x d.$ Il est souvent préférable d'utiliser la méthode de coefficients indéterminés, et on cherche une primitive de $x \mapsto (x^3 + \frac{1}{3}x^2)e^x$ sous la forme $(ax^3 + bx^2 + cx + d)\, e^x$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\int (x^3+\frac{1}{3}x^2)e^x dx = \left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^x,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}.$$

On a $\left[\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^x\right]' = (x^3+\frac{1}{3}x^2)e^x$

$$\begin{array}{lcl} \Longrightarrow\ \left(3ax^2+2bx+c\right)e^x+\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^x & = & (x^3+\frac{1}{3}x^2)e^x \\ \Longrightarrow\ \left(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)\right)e^x & = & (x^3+\frac{1}{3}x^2)e^x. \end{array}$$

Par identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ 3a+b=\frac{1}{3} \\ 2b+c=0 \\ c+d=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=\frac{-8}{3} \\ c=\frac{16}{3} \\ d=\frac{-16}{3} \end{array}\right.$$

D'où

$\int (x^3+\frac{1}{3}x^2)e^x dx = (x^3+\frac{-8}{3}x^2+\frac{16}{3}x-\frac{16}{3})e^x + c \qquad c\in\mathbb{R}$

2. $\int \dfrac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx.$

On pose : $t=3+2\sqrt{x}$, donc $dt=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

Alors

$$\begin{aligned} \int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx &= \int t^5 dt \\ &= \frac{1}{(5+1)}t^{(5+1)}+C, \quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{1}{6}t^6+C, \quad C\in\mathbb{R} \\ &= \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6+C, \quad C\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \frac{(3+2\sqrt{x})^5}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{6}(3+2\sqrt{x})^6+C,$$

où $C\in\mathbb{R}$