Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique/SM

Fait le 21 Janvier 2024

Année 2023/2024
L1 SM (Sciences de la Matière)
Durée : 01h30 mn

Examen Final de Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

~ Calculatrices et Téléphones portables interdits. Aucun document n'est autorisé ~

Exercice n°1 *(05 points)*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|1-4x| \leq 2$.

2. On considère l'ensemble $A(\subset \mathbb{R})$ défini par : $A =]-1, 4]$.
Déterminer pour l'ensemble A : *l'ensemble des majorants*, *l'ensemble des minorants*, *la borne supérieure*, *la borne inférieure*, *le maximum* et *le minimum* s'ils existent.

Exercice n°2 *(06 points)*

On considère la relation $\Re$, sur $\mathbb{R}^*$, définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*:\ x\Re y \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. Montrer que : $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow (x^2 - y^2)\left(1 - \frac{1}{x^2\, y^2}\right) = 0$.

3. a. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément α de $\mathbb{R}^*$.

b. En déduire les classes d'équivalence des réels 3 et 1.

Exercice n°3 *(04 points)*

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ 1 - x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

2. Déterminer les ensembles suivants : $f(\mathbb{R})$, $f(\,]-\infty, 1]\,)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(\,[0,1]\,)$.

Exercice n°4 *(05 points)*

1. Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 2|x|}{x}\right)$$

2. Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \arccos(2x - 1)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(\frac{3}{4})$.

~ Bon Courage ~

Barème détaillé : **Ex. 1: 1.**(*/2 Pts*). **2.**(*/3 Pts*). **Ex. 2: 1.**(*/2 Pts*), **2.**(*/1 Pt*), **3.a.**(*/2 Pts*). **3.b.**(*/1 Pt*).
Ex. 3: 1.(*/1 Pt*), **2.** (*/3 Pts*). **Ex. 4: 1.** (*/2.5 Pts*). **2.a.**(*/01 Pt*). **2.b.**(*/1.5 Pts*).

Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique/SM

Fait le 21 Janvier 2024

Année 2023/2024
L1 SM (Sciences de la Matière)
Durée : 01h30mn

Corrigé de l'examen Final
Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

Exercice n°1 *(05 points)*

1. Solutions de l'inéquation : $|1-4x| \leq 2$.

$(1-4x)$ s'annule en $x=\frac{1}{4}$. Donc, on a : $|1-4x| = \begin{cases} 1-4x & si\ x \leq \frac{1}{4} \\ -(1-4x) & si\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$ 0.5

*Pour $x \leq \frac{1}{4}$, l'inéquation s'écrit : $1-4x \leq 2 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}$. Solutions : $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. 0.5

*Pour $x > \frac{1}{4}$, l'inéquation s'écrit : $-1+4x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{3}{4}$. Solutions : $x \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. 0.5

Donc, les solutions de l'inéquation $|1-4x| \leq 2$ sont : $\boldsymbol{S} = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cup]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. 0.5

2. $\boldsymbol{A} =]-1, 4]$

- M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M$. Donc, tout réel ≥ 4 est un majorant de A.
  Ensemble des majorants de A : $\boldsymbol{M_A} = [4, +\infty[$. 0.5
- m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq m$. Donc, tout réel ≤ -1 est un minorant de A.
  Ensemble des minorants de A : $\boldsymbol{m_A} =]-\infty, -1]$. 0.5
- Borne supérieure *(le plus petit des majorants)* : $\boldsymbol{Sup\ A = 4}$. 0.5
- Borne inférieure *(le plus grand des minorants)* : $\boldsymbol{Inf\ A = -1}$. 0.5
- Maximum de A : $Sup\ A = 4 \in A$. *Donc :* $\boldsymbol{Sup\ A = Max A = 4}$. 0.5
- Minimum de A : $Inf\ A = -1 \notin A$. *Donc :* $\boldsymbol{Min\ A}$ **n'existe pas.** 0.5

Exercice n°2 *(06 points)*

La relation $\mathfrak{R}$, sur $\mathbb{R}^*$, est définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*: x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$.

1. $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

- $\mathfrak{R}$ est réflexive si : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\mathfrak{R}x$.

$$x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$ 0.5

$\Leftrightarrow 0 = 0$. Donc, $\mathfrak{R}$ est réflexive.

- $\mathfrak{R}$ est symétrique si : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathfrak{R}y \Longrightarrow y\mathfrak{R}x$

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}.$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$ 0.5

$\Longrightarrow y\mathfrak{R}x$. Donc, $\mathfrak{R}$ est symétrique.

- $\mathfrak{R}$ est transitive si : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ x\mathfrak{R}y\ et\ y\mathfrak{R}z \Longrightarrow x\mathfrak{R}z$

$$\begin{cases} x\mathfrak{R}y \\ et \\ y\mathfrak{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \\ et \\ y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} \end{cases} \Longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 + \frac{1}{z^2}.$$ 0.5

$\Longrightarrow x\mathfrak{R}z$. Donc, $\mathfrak{R}$ est transitive.

$\mathfrak{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
Conclusion : $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence. 0.5

2. $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow (x^2 - y^2)\left(1 - \frac{1}{x^2\, y^2}\right) = 0$ **?**

On a : $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 0.$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + \frac{y^2 - x^2}{x^2\, y^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) - \frac{x^2 - y^2}{x^2\, y^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(1 - \frac{1}{x^2\, y^2}) = 0.$$ 01

3. a. Classe d'équivalence d'un élément α de $\mathbb{R}^*$.

On cherche les éléments x tels que $x\mathfrak{R}\alpha$: $cl(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^*;\ x\mathfrak{R}\alpha\}$. 0.5

On a : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow (x^2 - \alpha^2)\left(1 - \frac{1}{x^2\,\alpha^2}\right) = 0$.

$x\mathfrak{R}\alpha \Leftrightarrow (x^2 - \alpha^2)\left(1 - \frac{1}{x^2\,\alpha^2}\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \alpha^2 = 0 \\ ou \\ 1 - \frac{1}{x^2\,\alpha^2} = 0 \end{cases} \quad 0.5 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\alpha \\ ou \\ x = \pm\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Donc : $\boldsymbol{cl(\alpha) = \{\alpha,\ -\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\alpha}\}}$. 01

b. $\boldsymbol{cl(3) = \{3,\ -3,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\}}$. 0.5 $\boldsymbol{cl(1) = \{1,\ -1\}}$. 0.5

Exercice n°3 *(04 points)*

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ 1 - x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1.• f est injective si et seulement si tout élément y possède <u>au plus</u> un antécédent.

$y = 1$ a plusieurs antécédents (tout $x \in]-\infty, 0]$), exemple: $f(-1) = f(-2) = 1$.

Donc, <u>f n'est pas injective</u>. 0.5

• f est surjective si et seulement si tout élément y possède <u>au moins</u> un antécédent.

Tous les éléments $y \in]1, +\infty[$ n'ont pas d'antécédents par f.

Donc, <u>f n'est pas surjective</u>. 0.5

2. Pour tout ensemble A, on a : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

- $f(\mathbb{R}) = \{f(x),\ x \in \mathbb{R}\} =]-\infty, 1]$. 0.5
- $f(]-\infty, 1]) = \{f(x),\ x \in]-\infty, 1]\} = [0,1]$. 01

Pour tout ensemble B, on a : $f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\}$.

- $f^{-1}(\{0\}) = \{x, f(x) = 0\} = \{1\}$. 0.5
- $f^{-1}(\{2\}) = \{x, f(x) = 2\} = \emptyset$. 0.5
- $f^{-1}([0,1]) = \{x, f(x) \in [0,1]\} =]-\infty, 1]$. 0.5

Exercice n°4 *(05 points)*

1.• $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\right) = \frac{0}{0}$. C'est une forme indéterminée. 0.5

On a : $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} = (1 + \sin x)$.

Donc : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{1-\sin}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1 + \sin x) = \mathbf{2}$. 0.5

• $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2|x|}{x}\right)$. On a : $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$.

<u>Si $x > 0$</u> : $x + 2\frac{|x|}{x} = x + 2$. Donc la limite à droite est : $\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\frac{x^2+2|x|}{2x}\right) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}(x + 2) = \mathbf{2}$. 0.5

<u>Si $x < 0$</u> : $x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$. Donc la limite à gauche est : $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\left(\frac{x^2+2|x|}{2x}\right) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}}(x - 2) = \mathbf{-2}$. 0.5

Les limites à droite et à gauche sont différentes. Donc, la limite en $x = 0$ <u>n'existe pas</u>. 0.5

2.a. $f(x) = \arccos(2x - 1)$ est définie pour : $\mathbf{-1 \leq (2x - 1) \leq 1}$. 0.5

$$-1 \leq (2x - 1) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 1) \leq 1 \\ et \\ (2x - 1) \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots \ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ et \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donc : $\boldsymbol{D_f = [0, 1]}$. 0.5

b. $f(0) = \arccos(-1) = \boldsymbol{\pi}$. 0.5 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos(0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$. 0.5 $f\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$. 0.5

~ End ~