Examen Final de Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

~ Calculatrices et Téléphones portables interdits. Aucun document n'est autorisé ~

Exercice n°1 *(06 points)*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $|1-3x| \leq 2$.

2. *Répondre à* ***l'une des questions*** *ci-dessous* (**a. ou b.**).

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(4^n - 1)$ est divisible par 3.

b. On considère la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\, e^y = y\, e^x$.
Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice n°2 *(05 points)*

1. Soit la fonction réelle f définie par: $f(x) = \begin{cases} \ln x + a & x \in]0,1] \\ x^2 + 1 & x \in]1, +\infty[\end{cases}$

a. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition D_f.

b. Trouver la valeur du réel a qui rend f continue sur D_f.

c. Montrer que la fonction g, définie par $g(x) = f(x) - 3$, s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]1,2[$.

2. On considère la fonction réelle h définie par: $h(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

h est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner l'expression du prolongement.

Exercice n°3 *(03 points)*

Calculer les limites suivantes, lorsqu'elles existent :

$$\lim_{x\to\pi} \left(\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 + 2|x|}{2x}\right)$$

Exercice n°4 *(06 points)*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{ch\,(x)}$

1. Calculer $f(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Déterminer l'image directe $f(\{-1,1\})$ et l'image réciproque $f^{-1}(\{-1\})$.

3. En déduire que f n'est ni injective, ni surjective. Justifier votre réponse.

4. Montrer que $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

~ Bon Courage ~

Barème détaillé : **Exercice 1:** **1.**(*/3 points*). **2.**(*/3 points*).
Exercice 2: **1.a.**(*/1 point*), **1.b.**(*/1.5 points*), **1.c.**(*/1 point*). **2.**(*/1.5points*).
Exercice 3: (*/1.5 points*) et (*/1.5 points*)
Exercice 4: **1.**(*/0.25+0.25+0.25 point*). **2.**(*/1.5+1.5 points*). **3.**(*/0.5+0.5 point*). **4.**(*/1.25 points*).

Fait le 09 Janvier 2023

Corrigé détaillé de l'examen Final
Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

Exercice n°1 *(06 points)*

1. Solutions de l'inéquation: $|1-3x| \leq 2$.

$(1-3x)$ s'annule en $x=\frac{1}{3}$.

Donc, on a: $|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & si\ \ x \leq \frac{1}{3} \\ -(1-3x) & si\ \ x > \frac{1}{3} \end{cases}$ 0.5

*Pour $x \leq \frac{1}{3}$, l'inéquation s'écrit: $1-3x \leq 2 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$. 0.5 Solutions: $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. 0.5

*Pour $x > \frac{1}{3}$, l'inéquation s'écrit: $-1+3x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$. 0.5 Solutions: $x \in]\frac{1}{3}, 1]$. 0.5

Donc, les solutions de l'inéquation $|1-3x| \leq 2$ sont : $S = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \cup]\frac{1}{3}, 1] = [-\frac{1}{3}, 1]$. 0.5

2. *L'étudiant(e) répondra à **l'une des questions** ci-dessous* (**a. ou b.**).

a. Résonnement par récurrence :

Notons $P(n)$ l'assertion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(4^n - 1)$ est divisible par 3.

- Initialisation: Pour $n = 0$, nous avons $4^0 - 1 = 0$.
  0 est divisible par 3. Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$. 0.5
- Hérédité: Pour $n > 0$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
  $P(n)$ est vraie: $(4^n - 1)$ est divisible par $3 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $(4^n-1) = 3k$.......(*)
  Démontrons que $P(n+1)$ est vraie :
  On a : $4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1$. De l'équation (*), on a $4^n = 3k+1$,.
  $= (3k+1) \times 4 - 1$.
  $= (3k) \times 4 + 4 - 1$.
  $= 3 \times 4k + 3 = 3 \times (4k+1)$ 01
  $= 3 \times k'$. Avec $k' = 4k+1 \in \mathbb{N}$.
  Donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
  C'est-à-dire, $P(n+1)$ est vraie. 0.5
- Conclusion: Par le principe de récurrence, on déduit que $P(n)$ est vraie. C'est-à-dire $(4^n - 1)$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$. 01

b. La relation $\mathfrak{R}$ sur $\mathbb{R}$ est définie par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\,e^y = y\,e^x$.

-Réflexivité: $x\mathfrak{R}x \Leftrightarrow x\,e^x = x\,e^x$, relation vérifiée $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc, $\mathfrak{R}$ <u>est réflexive</u>. 0.5

-Symétrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\,e^y = y\,e^x$.
$\Leftrightarrow y\,e^x = x\,e^y$
$\Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$. Donc, $\mathfrak{R}$ <u>est symétrique</u>. 0.5

-Transitivité: soient $x, y, z \in \mathbb{R}$
$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\,e^y = y\,e^x$ .... (a) 0.5
$y\mathfrak{R}z \Leftrightarrow y\,e^z = z\,e^y$ .... (b)
(a)*e^z $\Leftrightarrow x\,e^y e^z = y\,e^x e^z$. On remplace $y\,e^z$ par $z\,e^y$, puisque $y\,e^z = z\,e^y$ (b).
$\Leftrightarrow x\,e^y e^z = z\,e^x e^y$. On divise l'équation sur e^y et on obtient :
$\Leftrightarrow x\,e^z = z\,e^x$. 01
$\Leftrightarrow x\mathfrak{R}z$. Donc, $\mathfrak{R}$ <u>est transitive</u>.

$\mathfrak{R}$ est réflexive, symétrique et transitive $\Rightarrow \mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence. 0.5

Exercice n°2 *(05 points)*

1.a. $f(x) = \begin{cases} \ln x + a & x \in]0,1] \\ x^2+1 & x \in]1,+\infty[\end{cases}$; $D_f =]0,+\infty[$

Les fonctions "$\ln x + a$" et "x^2+1" sont définies et continues sur $]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$. Pour que f soit continue sur D_f, il faut qu'elle soit aussi continue en $x = 1$ (*cela dépend de la valeur du réel* a). 01

b. Détermination de la valeur de a pour que f soit continue sur D_f.

On a: $f(1) = \ln 1 + a = a$. 0.5

➢ <u>Continue à gauche de 1</u> : $\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} (\ln x + a) = a = f(1)$.

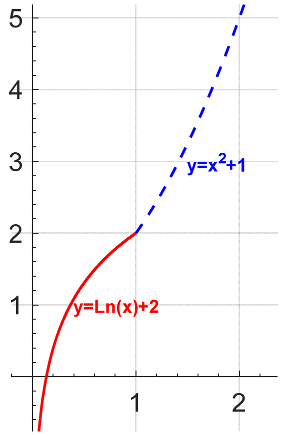
donc f est continue à gauche de 1. 0.5

➢ <u>Continue à droite de 1</u> : $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} (x^2+1) = 2$.

Pour que f soit continue à droite de 1, il faut que: $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = f(1)$

$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a$.

Donc, la valeur du réel a qui rend f continue sur son domaine de définition D_f est: $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$. 0.5 *→Voir le graphe ci-contre (non-demandé).*



c. On a: $g(x) = f(x) - 3$.

On a: $g(1) = f(1) - 3 = 2 - 3 = -1$. *0.25*

$g(2) = f(2) - 3 = 5 - 3 = 2$. *0.25*

Comme $g(1).g(2) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in]1,2[$ tel que $g(x) = 0$.
Donc, g s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]1,2[$. 0.5

2. On a: $h(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit et composition de fonctions continues).

Pour voir si h admet un prolongement, étudions l'<u>existence de la limite</u> en $x = 0$: 0.5

$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ (fonction bornée) et $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$,

Donc : $\lim_{x\to 0} \left(x^2 \cos\frac{1}{x}\right) = 0$.

et $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right) = 1$. 0.5

Comme la limite en $x = 0$ existe, donc on peut prolonger h en $x = 0$.

La fonction prolongée k est définie par: $k(x) = \begin{cases} h(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 1 & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ \ x = 0 \end{cases}$ 0.5

k est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°3 *(03 points)*

• $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x}\right) = \frac{0}{0}$. C'est une forme indéterminée, à levée. 0.5

On a: $\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x} = 2\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = 2\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} = 2(1-\cos x)$. 0.5

Donc $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{2\sin^2 x}{1+\cos x}\right) = \lim_{x\to\pi}(2(1-\cos x)) = \mathbf{4}$. 0.5

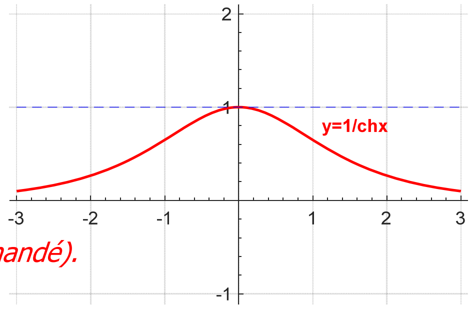
• $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2+2|x|}{2x}\right)$. On a : $\frac{x^2+2|x|}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{|x|}{x}$.

<u>Si $x > 0$</u> : $\frac{x}{2} + \frac{|x|}{x} = \frac{x}{2} + 1$. Donc la limite à droite est : $\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2+2|x|}{2x}\right) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \mathbf{1}$. 0.5

<u>Si $x < 0$</u> : $\frac{x}{2} + \frac{|x|}{x} = \frac{x}{2} - 1$. Donc la limite à gauche est : $\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2+2|x|}{2x}\right) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \mathbf{-1}$. 0.5

Les limites à droite et à gauche sont différentes. Donc, la limite en $x = 0$ <u>n'existe pas</u>. 0.5

Exercice n°4 *(06 points)*



1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{ch(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$.

$f(0) = 1$. **0.25**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. **0.25**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. **0.25** *→Voir le graphe ci-contre (non-demandé).*

2. • Image directe $f(\{-1,1\})$:

On a: $f(\{-1,1\}) = \{f(x);\ x \in \{-1,1\}\}$. **0.5**

$f(1) = \frac{2}{e^1+e^{-1}}$. **0.25**

$f(-1) = \frac{2}{e^1+e^{-1}} = f(1)$. **0.25**

Donc $f(\{-1,1\}) = \left\{\frac{2}{e^1+e^{-1}}\right\}$. **0.5**

• Image réciproque $f^{-1}(\{-1\})$:

On a: $f^{-1}(\{-1\}) = \{x;\ f(x) \in \{-1\}\}$. **0.5**

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{e^x+e^{-x}} = -1$

$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = -2$. **0.5**

Cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$, $(e^x + e^{-x}) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc: $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$. **0.5**

3. • f n'est pas injective car il existe deux réels différents, $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ par exemple, tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

En **2.**, on a montré que $y = \frac{2}{e^1+e^{-1}}$ possède 2 antécédents ($x = -1$ et $x = 1$). **0.5**

• f n'est pas surjective car il existe un réel y tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq y$.

En **2.**, on a montré que $y = -1$ n'a pas d'antécédent. **0.5**

4. On a: $f(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = y$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

$\frac{2}{e^x+e^{-x}} = y \Leftrightarrow ye^x + ye^{-x} = 2$. On multiplie l'équation par e^x.

$\Leftrightarrow ye^{2x} - 2e^x + y = 0$. On pose $X = e^x$ *(Changement de variable).* $x = \ln(X)$.

$\Leftrightarrow yX^2 - 2X + y = 0$. **0.5**

Cette équation de 2ème degré admet des solutions réelles si et seulement si $\Delta' = 1 - y^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $y \in [-1,1]$. **0.25**

Or, on sait que $y > 0$. Donc, $y \in]0,1]$.

Les $y \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ n'ont pas d'antécédents.

Donc $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$. **0.5**

~ End ~