Examen Final de Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

~ Calculatrices et Téléphones portables interdits ~

~ Aucun document n'est autorisé ~

Exercice n°1 *(05,5 Points : **1.**/1 Pt. **2.**/2,5 Pts. **3.**/2 Pts.)*

1. L'implication suivante est-elle vraie ou fausse ? Donner sa contraposée.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq 3 \Rightarrow\ n < 5.$

2. On considère la relation $\Re$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : $x \Re y \Leftrightarrow x + y$ est pair.

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

3. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\,x\,|$ et soit l'ensemble $E = \left]-1,\ \frac{1}{2}\right]$.

Déterminer l'image directe de E par f. Déterminer l'image réciproque de E par f.

Exercice n°2 *(03 Points : 0,5 Pt.×6)*

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $A = \left\{\frac{n}{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$

Déterminer pour A l'*ensemble des majorants*, l'*ensemble des minorants*, *la borne supérieure*, *la borne inférieure*, *le maximum* et *le minimum* s'ils existent.

Exercice n°3 *(06,5 Points : **1.**/2 Pts. **2.**/2 Pts. **3. a**/1,5 Pts. **b.**/1 Pt.)*

On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f puis étudier sa parité.

2. Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

3. On considère le changement de variable suivant : $X = x - 1$.

a. Déterminer l'expression de $f(X)$ puis étudier sa parité.

b. Est-ce que le changement de variable a changé la parité de la fonction f ? Expliquer.

Exercice n°4 *(05 Points : **1.**/3 Pts. **2.**/2 Pts.)*

1. On considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2}}$

f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner l'expression du prolongement.

2. Soient les deux fonctions $f : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \longmapsto \arcsin(x)$ et $g : [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$, $x \longmapsto \arccos(x)$

Calculer : $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

~ Bon Courage ~

Corrigé de l'examen Final
Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

Exercice n°1 *(05.5 points)*

1. Vraie. 0.25 Contraposée : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \Rightarrow\ n > 3.$ 0.75

2. La relation $\Re$ sur $\mathbb{Z}$ est définie par : $x\Re y \Leftrightarrow x + y$ est pair.

- Réflexivité: Soit $x \in \mathbb{Z}$. $x\Re x \Leftrightarrow x + x$ est pair. Ce qui est vérifié, puisque $x + x = 2x$.
C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x\Re x$. Donc $\Re$ est réflexive. 0.5

- Symétrie: Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ et supposant $x\Re y$.
$x\Re y \Leftrightarrow\ x + y$ est pair.
$\Leftrightarrow y + x$ est pair (puisque $x + y = y + x$).
$\Leftrightarrow y\Re x$. Donc $\Re$ est symétrique. 0.5

- Transitivité: Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ et supposant $x\Re y$ et $y\Re z$
On a : $x\Re y \Leftrightarrow x + y = 2k$ .... (1) 0.5
$y\Re z \Leftrightarrow y + z = 2\ell$ .... (2)
(1)+(2) $\Leftrightarrow x + 2y + z = 2k + 2\ell$.
$\Leftrightarrow x + z = 2(k + \ell - y)$, c'est-à-dire $x + z$ est pair.
$\Leftrightarrow x\Re z$. Donc $\Re$ est transitive. 0.5

$\Re$ est réflexive, symétrique et transitive. Donc, $\Re$ est une relation d'équivalence. 0.5

3. $E =]-1, \frac{1}{2}]$. $f(E) = [0, 1[$. 01 $f^{-1}(E) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 01

Exercice n°2 *(03 points)*

A : sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \left\{\frac{n}{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Alors : $\boldsymbol{A = [0, \frac{1}{2}[}$ **.**

- M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M$. Donc, tout réel $\geq \frac{1}{2}$ est un majorant de A.
Ensemble des majorants de A : $\boldsymbol{M_A} = [\frac{1}{2}, +\infty[$. 0.5
- m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq m$. Donc, tout réel ≤ 0 est un minorant de A.
Ensemble des minorants de A : $\boldsymbol{m_A} =]-\infty,\ \mathbf{0}]$. 0.5
- Borne supérieure *(le plus petit des majorants)* : $\boldsymbol{Sup\ A = \frac{1}{2}}$. 0.5
- Borne inférieure *(le plus grand des minorants)* : $\boldsymbol{Inf\ A = 0}$. 0.5
- Maximum de A : $Sup\ A = \frac{1}{2} \notin A$. *Donc :* $\boldsymbol{Max\ A}$ n'existe pas. 0.5
- Minimum de A : $Inf\ A = 0 \in A$. *Donc :* $\boldsymbol{Min\ A = 0}$. 0.5

Exercice n°3 *(06.5 points)*

1. $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)}$. f est définie pour tout $x \neq 1$. $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. 01

Parité: $f(-x) = \frac{(-x)^2-2(-x)+2}{(-x-1)} = \frac{x^2+2x+2}{-(x+1)} = \frac{x^2+2x+2}{-(x+1)}$. 0.5

$f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$. Donc, f n'est ni paire ni impaire. 0.5

2. Calcul de $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

- On a : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)}$.

f n'est pas définie en 1 : $\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. 0.5

$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. 0.5

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)} = +\infty$. 0.5

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)} = -\infty$. 0.5

3. a. Expression de $f(X)$:

On a: $X = x - 1 \Rightarrow x = X + 1$.

$$f(X) = \frac{(X+1)^2 - 2(X+1) + 2}{(X+1-1)} = \frac{X^2+1}{X}.$$ 01

<u>Parité</u>: $f(-X) = \frac{(-X)^2+1}{-X} = -\frac{X^2+1}{X} = -f(X)$.

Donc, f est impaire. 0.5

b. Le changement de variable a changé la parité de la fonction.
L'origine ($X = 0$) devient un centre de symétrie après la translation du graphe (changement de variable). 01

Exercice n°4 *(05 points)*

1. $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2}}$

La fonction f est définie et est continue sur $\mathbb{R}^*$. Pour voir si f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$, il faut voir si elle admet une limite finie en 0. 0.5

Etudions l'existence de la limite en 0 :

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{|x|}\right) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{-x}\right) = 1.$$ 01

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2}}\right) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{|x|}\right) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \left(\frac{x^2-x}{x}\right) = -1.$$ 01

Comme la limite de f en 0 n'existe pas, on ne peut pas la prolonger par continuité en 0.

Donc, f ne peut pas être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$. 0.5

2. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. 0.5 $\qquad$ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. 0.5

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$. 0.5 $\qquad$ $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$. 0.5

~ *End* ~