Chapitre 1 : Logique et raisonnements mathématiques

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références
citées dans la bibliographie de ce cours.

Sommaire

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1. Définitions et Rappels

- **<u>Les mathématiques</u>** : C'est un langage unique pour s'exprimer rigoureusement et accéder aux différents domaines scientifiques. Il rend les calculs exacts et vérifiables.
- **<u>La logique mathématique</u>** : C'est l'étude des mathématiques en tant que "langage". La logique est utile dans toute démarche scientifique.
- **<u>Le raisonnement mathématique</u>** : C'est une démarche logique qui permet de valider, ou d'infirmer, une hypothèse et de l'expliquer.
- **<u>Ensembles de nombres en mathématiques (ensembles de référence)</u>**

Dans ce cours, nous ferons appel à aux ensembles de nombre ci-dessous :

- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

- L'ensemble des nombres décimaux relatifs : $\mathbb{D}$.

Un nombre décimal relatif est, non seulement, un nombre entier relatif, mais peut aussi être un nombre à virgule flottante, positif ou négatif. La partie décimale est composée d'une <u>quantité finie de chiffres</u>. $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$.

<u>Exemples</u> : $1,\ 1.5,\ 6.47, -3.25, -5.889, \dots$

- L'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\ ;\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$.

Un nombre rationnel s'écrit sous forme d'une fraction.

$\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$: Il est formé des nombres rationnels et irrationnels.

<u>Exemples</u> : $\sqrt{2},\ \ln 3\ ,\ 1,\ \pi, \dots$

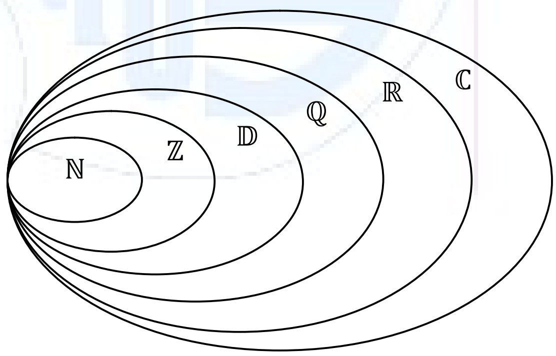
$\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$.

Tout nombre complexe s'écrit sous la forme : $z = a + ib$,

Où a et b sont des nombres réels. $i \in \mathbb{C}$ tel que : $i^2 = -1$.

$\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Notions de logique mathématique

2.1. Les assertions mathématiques

Définition : Une ***Assertion***, ou "***Proposition***", est un "Enoncé" mathématique qui peut être "Vrai" ou "Faux" mais pas les deux au même temps. C'est-à-dire une phrase à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité.

Notation: - Une assertion est notée par une lettre majuscule: **A, B, C,....**
- Une assertion "vraie" est notée par **V** ou **1**.
- Une assertion "fausse" est notée par **F** ou **0**.

Exemples :

Assertion	Valeur de vérité
A : "*La porte de cette salle est ouverte*"	**V**
B : "2+3 = 5"	**V**
C : "2×4 = 7"	**F**

Remarque : A partir d'une ou de plusieurs propositions, on peut en construire d'autres. Nous verrons des exemples ci-après.

2.2. Opérations sur les assertions et les connecteurs logiques

• **La négation:** La négation d'une proposition P, notée $\overline{\mathrm{P}}$ (ou **nonP**), est vraie si P est fausse et est fausse si P est vraie.

P	nonP
V	F
F	V

Cette table est dite "table de vérité"

Exemples : - Soit P: "cet objet est blanc". Sa négation est $\overline{\mathrm{P}}$: "cet objet n'est pas blanc"
- Soit A: "la fonction f est nulle". Sa négation est $\overline{\mathrm{A}}$: "la fonction f n'est pas nulle", non pas la "fonction f ne s'annule pas".
- La négation de "$x \geq 0$" et "$x < 0$".

Remarque : On a $\overline{\overline{\mathrm{P}}} = \mathrm{P}$ (négation de la négation).

• **La conjonction: Le connecteur logique « *et* » (noté ∧)**

Soient P et Q deux assertions données. La **conjonction** des deux propositions, notée "P et Q" ou "$P \wedge Q$", est une proposition vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion "$P \wedge Q$" est fausse sinon. On résume ceci en utilisant une table de vérité :

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table de vérité "$P \wedge Q$"

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

Exemples : - l'assertion ("2>4" et "2=3-1") est fausse.
- l'assertion ("2<4" et "2=3-1") est vraie.
- Soient les assertions P "Cette carte est un as" et Q "Cette carte est un cœur". Alors l'assertion "P ∧ Q" est vraie si la carte est un "as de cœur" et est fausse pour toute autre carte.

Remarque : La proposition $(P \wedge \overline{P})$ est toujours fausse.

• La disjonction: Le connecteur logique « *ou* » (noté ∨)

Soient *P* et *Q* deux assertions. La **disjonction** des deux propositions, notée "*P* ou *Q*" ou "*P* ∨ *Q*", est vraie si l'une (au moins) des deux assertions *P* ou *Q* est vraie. L'assertion "*P* ∨ *Q*" est fausse si les deux assertions sont fausses.

P	**Q**	**P ∨ Q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité "P ∨ Q"

Exemples : - Soient P : "Cette carte est un as" et Q : "Cette carte est un cœur". Alors l'assertion "P ∨ Q" est vraie *si la carte est un as ou bien un cœur (plusieurs possibilités, en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).*
- l'assertion ("2>4" ou "2=3-1") est vraie.

Remarques :

- La proposition $(P \vee \overline{P})$ est toujours vraie, puisqu'on a toujours : P vraie ou $\overline{P}$ vraie.
- La négation de $(P \wedge Q)$, notée $\overline{P \wedge Q}$, est $\bar{P} \vee \bar{Q}$.
- Négation de $(P \vee Q)$, notée $\overline{P \vee Q}$, est $\bar{P} \wedge \bar{Q}$.

• L'implication : Le connecteur logique "⇒"

L'assertion "**NonP ou Q**" $(\bar{P} \vee Q)$ est notée "P⇒Q".

Elle se lit : "P implique Q", "si P est vraie alors Q est vraie" ou "si P alors Q".

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	**Q**	**P ⇒Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table de vérité "$P \Rightarrow Q$"

Remarques: • "P⇒Q" est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse (*le vrai n'implique jamais le faux*).

• La négation de "P⇒Q" est "P ∧ $\bar{Q}$ ".

Exemples : **1.** "$0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ " est vraie ; "$2+1=3 \Rightarrow 3-1=3$" est fausse

2."$(2+2=5) \Rightarrow \sqrt{2}=2$" est vraie

!: si P est fausse alors P⇒Q est toujours vraie.

• L'équivalence : Le connecteur logique "⇔"

L'***équivalence*** est définie par : « *P* ⇔ *Q* » est l'assertion « *(P* ⇒*Q) et (Q* ⇒ *P)* ».

Elle se lit : "*P est équivalent à Q*"

"*P équivaut à Q*" ou "*P si et seulement si Q*".

La proposition «*P* ⇔ *Q*» est vraie si *P* et *Q* ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire lorsque *P* et *Q* sont vraies ou lorsque *P* et *Q* sont fausses en même temps.

P	**Q**	**P ⇔Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table de vérité "P ⇔ Q"

Exemple : "$x.x' = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \; ou \; x' = 0)$" est vraie.

Remarque : Généralement, en pratique, on s'intéresse aux propositions vraies : on écrit P⇔Q lorsque P et Q sont vraies.

Propriétés : Soient P, Q et R trois assertions. Les équivalences suivantes sont vraies.

- (P∧Q) ⇔ (Q∧P) et (P∨Q) ⇔ (Q∨P) (*Commutativité*)
- (P∧Q) ∧R ⇔ P∧(Q ∧R) et (P∨Q)∨R ⇔ P∨(Q∨R) (*Associativité*)
- (P∧Q)∨R ⇔ (P∨R) ∧ (Q∨R) (Distributivité de ∨ par rapport ∧)
- (P∨Q)∧R ⇔ (P∧R) ∨(Q∧R) (Distributivité de ∧ par rapport ∨)
- Négation de $(P \wedge Q)$: $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$
- Négation de $(P \vee Q)$: $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
- "*P* ⇒*Q*"⇔"$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ "
- ...etc.

2.3. Les quantificateurs

• Le quantificateur $\forall$ ("*pour tout" ou "quel que soit"*)

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x (ou de plusieurs paramètres), par exemple "$x^2 \geq 1$", l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

L'assertion "$\forall x \in E,\ P(x)$" est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

On lit "*Pour tout* $x \in E, P(x)$", sous-entendu "*Pour tout* x *appartenant à* E, $P(x)$ *est vraie*".

Exemple : "$\forall x \in [1, +\infty[,\ x^2 \geq 1$" est une assertion vraie.

"$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 2$" est une assertion fausse.

• Le quantificateur $\exists$ (*il existe au moins)*

L'assertion "$\exists x \in E, P(x)$" est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins une valeur x de E pour laquelle $P(x)$ est vraie.

On lit "*il existe* x *appartenant à* E *tel que* $P(x)$ *(soit vraie)*".

Exemple : "$\exists x \in \mathbb{R},\ x(x-2) < 0$" est vraie. $x = 1$ par exemple.

"$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$" est fausse.

• La négation des quantificateurs

- La négation de "$\forall x \in E, P(x)$" est "$\exists x \in E,\ \textbf{non}\ \boldsymbol{P(x)}$".
- La négation de "$\exists x \in E, P(x)$" est "$\forall x \in E,\ \textbf{non}\ \boldsymbol{P(x)}$".

Exemples :- La négation de "$\forall x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$" est l'assertion "$\exists x \in [1, +\infty[, x^2 < 1$".

- La négation de "$\exists x \in [1, +\infty[, x^2 \geq 1$" est l'assertion "$\forall x \in [1, +\infty[, x^2 < 1$".

- La négation de l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0\ tel\ que (x + y) > 6$"

est "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0\ tel\ que (x + y) \leq 6$".

Remarques importantes

- L'ordre des quantificateurs est très important.

  Exemple : les deux phrases logiques suivantes sont différentes.

  "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x + y) > 0$" et "$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ (x + y) > 0$"

  La première est vraie, la seconde est fausse.

- Quand on écrit "$\exists x \in \mathbb{R}, telle\ que\ f(x) = 0$" cela signifie juste qu'il existe un réel x pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. Dans un premier temps vous pouvez lire la phrase ainsi : "*il existe* au moins *un réel* x *tel que* $f(x) = 0$".

  Afin de préciser que f s'annule en une unique valeur de x, on rajoute un point d'exclamation au quantificateur : $\exists!\ x \in \mathbb{R}, telle\ que\ f(x) = 0$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

3. Les principaux types de raisonnement

Voici ci-après les méthodes classiques de raisonnements. *Tout autre raisonnement logique est acceptable.*

3.1. Le raisonnement "*Direct*" ou par "*Déduction*"

Si on veut montrer que l'assertion "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. Méthode souvent utilisée.

Exemples

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 8\frac{n(n+1)}{2} + 1$ est un carré.

Il suffit de développer l'expression $8\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

$8\frac{n(n+1)}{2} + 1 = \ \ldots\ = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$, ce qui correspond à un carré.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 5 > 0$.

Signe du polynôme $x^2 - 3x + 5$: $\Delta = 9 - 20 = -4 < 0$. Donc, ce polynôme ne s'annule pas et son signe est donné par le signe du coefficient de x^2, égal à 1, qui est positif. On déduit que $x^2 - 3x + 5 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

$a, b \in \mathbb{Q}$. *Donc ils peuvent s'écrire:* $a = \frac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$

$b = \frac{p'}{q'}$ *avec* $p' \in \mathbb{Z}$ *et* $q' \in \mathbb{N}^*$

$\rightarrow a + b = \frac{pq' + qp'}{qq'}$*; avec* $(pq' + qp') \in \mathbb{Z}$ et $pq' \in \mathbb{N}^*$.

Donc $a + b$ s'écrit sous la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ *et* $q'' \in \mathbb{N}^*$.

C'est-à-dire : $a + b \in \mathbb{Q}$.

3.2. Le raisonnement "*Cas par cas*" ou par "*Disjonction de cas*"

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les éléments x d'un ensemble E, on montre l'assertion pour les éléments x dans une partie A de E, puis pour les x de E n'appartenant pas à A (ou sur plusieurs parties A_i disjointes de E, avec $A_i \cap A_j = \emptyset$). C'est la méthode de ***disjonction de cas*** ou du ***cas par cas***.

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x - 1| \leq (x^2 - x + 2)$ .... (*)

Nous distinguons deux cas :

- $x \geq 1$: $|x - 1| = x - 1$. Alors, l'inéquation (*) s'écrit :

  $(x - 1) \leq (x^2 - x + 2) \Leftrightarrow\ x^2 - 2x + 3 \geq 0$

  $\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 0$ *(vérifiée* $\forall x$*)*

- $x < 1$: $|x - 1| = -(x - 1)$. Alors, (*) s'écrit :

  $-(x - 1) \leq x^2 - x + 2 \Leftrightarrow\ x^2 + 1 \geq 0$ *(vérifiée* $\forall x$*).*

Donc, la propriété (*) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

3.3. Le raisonnement par "*Contraposition*"

Définitions : Soient *P* et *Q* deux propositions.

- La **contraposée** de l'assertion "$P \Rightarrow Q$" est l'assertion "non$Q \Rightarrow nonP$".

  ! : Ne pas confondre la contraposée et la négation.

- Le raisonnement par **contraposition** est basé sur l'équivalence suivante :

  L'assertion "$P \Rightarrow Q$" est équivalente à "non$Q \Rightarrow nonP$"

  Donc, si l'on souhaite montrer l'assertion "$P \Rightarrow Q$", on montre en fait que si **non*Q* est vraie** alors **non*P* est vraie**.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si "n^2 est pair" alors "n est pair".

C'est-à-dire: *P* (n^2 *est pair*)$\Rightarrow$*Q*(n *est pair*)

Sa contraposée est : "n n'est pas pair" (non*Q*) $\Rightarrow$"n^2 est impair" (*nonP*).

On suppose donc que "n n'est pas pair" et on montre que donc que "n^2 est impair".

On a : n n'est pas pair, il est donc impair et il s'écrit sous la forme

$n = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$

Donc : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$

n^2 s'écrit donc sous la forme $2l + 1$ $(avec: l = 2k^2 + 2k.\ l \in \mathbb{N})$.

n^2 est donc impair, ce qui correspond à *non(P).*

On a donc montré que si n est impair alors n^2 est impair (non$Q \Rightarrow nonP$). Par contraposition, ceci est équivalent à "si n^2 est pair alors n est pair".

3.4. Le raisonnement par "*l'Absurde*"

Le **raisonnement par l'absurde** permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que sa négation est fausse : Si "*nonP*" est fausse, alors *P* est vraie.

P	nonP
V	F
F	V

Exemples

1. Soit à démontrer que "0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$".

On suppose que "0 a un inverse dans $\mathbb{R}$", noté a.

Donc, $0 \times a = 1$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 0 = 0$.

On déduit que $0 = 1$: c'est une contradiction.

Donc, la proposition "0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$" est vraie.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

2. Soit à démontrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie:

On a: $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ "(nonP) ou Q"

$\Leftrightarrow$ "(nonP) v Q" (*voir la définition de '*$\Rightarrow$*'*).

Donc: non($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$*non (*(nonP)vQ)

$\Leftrightarrow$ P $\wedge$ non(Q)

Pour démontrer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on suppose à la fois que "P est vraie et que Q est fausse" et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \Rightarrow Q$" est vraie.

3.5. Le raisonnement par un "*Contre-exemple*"

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E, P(x)$" est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

La négation de "$\forall x \in E, P(x)$" est "$\exists x \in E, nonP(x)$". Trouver un tel x c'est trouver un **contre-exemple** à l'assertion "$\forall x \in E, P(x)$".

Exemple: Montrer que l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x > 0$" est fausse.

Si on prend $x = -1$, on trouve $x^2 + 2x = -1$ qui n'est pas > 0.

C'est un contre-exemple. Donc, l'assertion "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x > 0$" est fausse.

3.6. Le raisonnement par "*Récurrence*"

Le **principe de récurrence** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie $\forall\ n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1- lors de l'***initialisation,*** on prouve $P(0)$, pour $n = 0$ (la plus petite valeur de n).

2- Pour l'étape d'***hérédité***, on suppose que pour n (≥ 0) donné $P(n)$ est vraie et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$, au rang suivant, est vraie.

3- Enfin, dans la ***conclusion***, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque: la rédaction d'une récurrence est à respecter scrupuleusement.

Exemple : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.

Notons $P(n)$ l'assertion : $2^n > n$.

- Initialisation: Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 \geq 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité: Fixons $n > 0$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a : $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$. Car, par $P(n)$, nous savons que $2^n > n$.

Donc : $2^{n+1} > (n+1)$, car $2^n \geq 1$.

Ce résultat correspond à $P(n+1)$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion: Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(2^n > n)$.

---

4. Annexe: Vocabulaire essentiel des mathématiques

- **Proposition (ou assertion ou affirmation)**: Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux.
- **Définition:** Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet par exemple.
- **Axiome:** Un axiome est un énoncé supposé "vrai" à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.
- **Théorème:** Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas démontrée comme telle).
- **Corollaire:** Un corollaire est une proposition qui est conséquence immédiate d'une proposition déjà démontrée.
- **Lemme:** Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
- **Conjecture:** Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer.

Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.