Chapitre 2 : Ensembles, Applications et Relations

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références citées dans la bibliographie de ce cours.

Sommaire

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

1. Ensembles

1.1. Définitions

- Un ***ensemble*** est une collection d'éléments. Généralement, il est noté par une lette majuscule :

  Exemples : $E = \{0, 1, 2\}$; $G = \{rouge,\ noir\}$.

  Autre façon de définir un ensemble : Une collection d'éléments qui vérifient une propriété donnée.

  Exemples

  - $E = \{x \in \mathbb{N}\ ;\ x < 6\}$, qui correspond à: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
  - $F = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < x \leq 2\}$. Dans ce cas, on ne peut pas donner la liste des éléments de F.

- Un ensemble *vide est* noté $\emptyset$ (ensemble ne contenant aucun élément).
- Appartenance (Notation): On écrit $\boldsymbol{x \in E}$ si x est un élément de l'ensemble E. Dans le cas contraire, on écrit : $\boldsymbol{x \notin E}$.

  Exemple: Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2\}$.

  On a: $1 \in E$ et $4 \notin E$.

- **Ensembles de nombres en mathématiques (ensembles de référence)**

  Voir le Chapitre 1

  - L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
  - L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
  - L'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\ ;\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$.
  - L'ensemble des réels $\mathbb{R}$: formé des nombres rationnels et irrationnels.

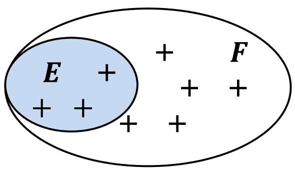
    Exemples : $\sqrt{2},\ \ln 3\ ,\ 1,\ \pi, \dots$

  - L'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$. Tout nombre complexe s'écrit sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels. $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

1.2. Propriétés

Soient E et F deux ensembles.

- **L'inclusion ($\subset$):** On dit que E est inclus dans F ($E \subset F$) si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit :



$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F$$

On dit alors que E est un ***sous-ensemble*** de F ou E est une ***partie*** de F.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

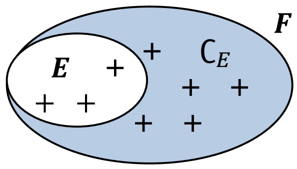
Si $E \subset F$ et $E \neq F$, l'inclusion est dite **stricte** ou que E est une **partie propre** de F et on note $E \subsetneq F$ (sous-ensemble mais non égale).

Attention (à ne pas confondre $\in$ et $\subset$) ! : on écrit $2 \in \mathbb{N}$, $\{2\} \subset \mathbb{N}$.

- **Egalité de deux ensembles**

  On dit que $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

- **Complémentaire** : Si $E \subset F$, la complémentaire de E est l'ensemble définit comme suit : $\complement_F E = \{x; x \in F \text{ et } x \notin E\}$.



  Exemple : $E = \{0, 1, 2\}$. $F = \{0, 1, 2, 3, 5, 8\}$.
  $E \subset F$. $\complement_F E = \{3, 5, 8\}$.

  Autres notations de la complémentaire: E_C, $\bar{E}$,… .

- **Différence :** Soient A et B deux ensembles quelconques.

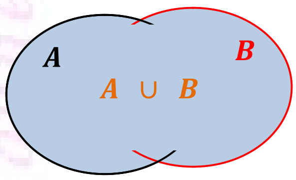
  On définit la différence $A - B$ par : $A - B = \{x;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

  Exemple : $A = \{1, 2, 4, 6\}$. $B = \{0, 2, 6\}$.
  $A - B = \{1, 4\}$.

  ! : A ne pas confondre la différence et la complémentaire.

- **l'Union (∪) et l'intersection (∩)**

  Soient A et B *deux sous-ensembles de* F.



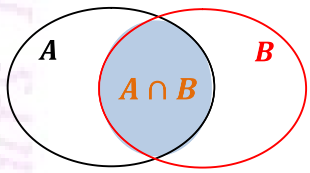
  L'union de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :

  $$A \cup B = \{x\ ;\ x \in A \ \textbf{ou}\ x \in B\}.$$

  Noter que x peut appartenir à A et à B en même temps.

  L'intersection de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :

  $$A \cap B = \{x;\ x \in A \ \textbf{et}\ x \in B\}$$



  Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les deux ensembles A et B sont **disjoints**.

- **Autres Propriétés**

Soient A, B et C *des parties d'un ensembles de* E. On a :

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *L'intersection est distributive par rapport à l'union.*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *L'union est distributive par rapport à l' intersection.*
- ……etc.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1.3. Ensemble des parties d'un ensemble

Définitions

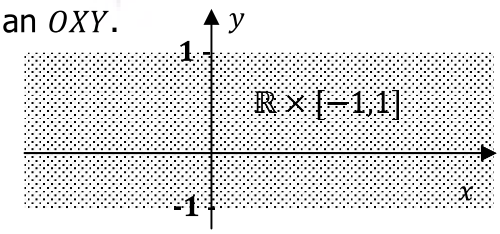
- Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le **cardinal** de E.
  $Card(E) = n$.
  Exemple : $E = \{a, b, c\}$. $Card(E) = 3$.
- A partir d'un ensemble donné E, on peut définir d'autres ensembles E_i tel que $E_i \subset E$. Les **sous-ensembles** E_i ainsi définis sont des **parties** de E. Notons par $\wp(E)$ l'ensemble des parties de E.
  Exemple : soit $E = \{0, 1, 2\}$.
  $\wp(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\{0,1,2\}\}$.
  $\wp(E)$ comporte 8 sous-ensembles.
- Le nombre de parties ou de sous-ensembles d'un ensemble fini E est donné par : $\mathbf{2^{Card(E)}}$.
  Dans l'exemple précédent, $2^{Card(E)} = 2^3 = 8$ sous-ensembles.
- On appelle **partition de l'ensemble** E toute famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles E_i (E_1: sous-ensemble 1, E_2: sous-ensemble 2, …), formée de parties non-vides de E, qui vérifie les deux conditions suivantes :
  1. Les parties E_i sont deux à deux disjointes : $E_i \cap E_j = \emptyset$.
  2. Leur réunion est égale à E : $E = \cup E_i$.
  Exemple : Soit $E = \{0, 1, 2\}$. $\mathcal{F} = \{\{0\}, \{1,2\}\}$ est une partition de E.
  Vérification: $\{0\} \cap \{1,2\} = \emptyset$ et $\{0\} \cup \{1,2\} = \{0, 1, 2\} = E$.
  Donner d'autres partitions et vérifier les deux conditions ci-dessus.

1.4. Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien des deux ensembles**, E et F, appelé aussi "ensemble produit", **noté** $\boldsymbol{E \times F}$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. C'est-à-dire : $E \times F = \{(x, y);\ x \in E\ et\ y \in F\}$.

Exemples

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\ ;\ x \in \mathbb{R}\ \ et\ \ y \in \mathbb{R}\}$.
  Ça correspond à tous les points (x, y) du plan OXY.
- $\mathbb{R} \times [-1,1] = \{(x, y)\ ;\ \ x \in \mathbb{R}\ , y \in [-1,1]\}$.
  Ça correspond à tous les points (x, y) du domaine représenté ci-contre.



N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Remarque: Lorsque $E = F$, on note par E^2 le **carré cartésien** $E \times E$.

L'ensemble des couples $(x, x) \in E^2$ est dit **diagonale du carré cartésien**.

2. Applications et Fonctions

2.1. Définitions

- **Application:** Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle **application,** notée f, de E dans F, toute correspondance (relation) qui à tout élément x de E fait correspondre **un et un seul élément** y de F.

  On écrit : $$f : E \to F$$ $$x \mapsto y = f(x)$$

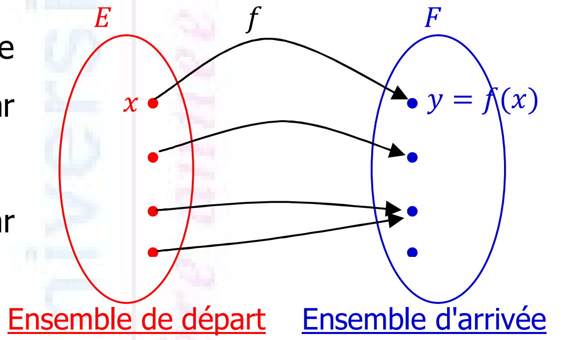
  Appellations:

  E : **Ensemble de départ**. F : **Ensemble d'arrivée**

  x : **Antécédent**. y : **Image** de x par f

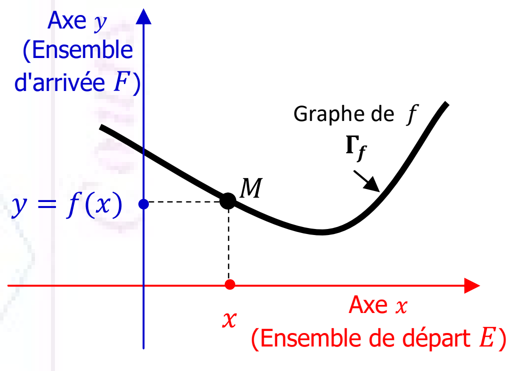
Nous représenterons les applications par deux types d'illustrations :

(1). Les ensembles « patates » : l'ensemble de départ et celui d'arrivée sont schématisés par des ovales et leurs éléments par des points. L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par une flèche.



(2). L'autre représentation est celle des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou des parties de $\mathbb{R}$). L'ensemble de départ $\mathbb{R}$ est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées.

L'association $x \mapsto f(x)$ est représentée par le point $M(x, f(x))$.



Le **graphe** d'une application $f : E \to F$ est le sous-ensemble Γ_f du produit cartésien $E \times F$ formé par les couples $(x, f(x))$ quand x décrit l'ensemble de départ E (voir la figure ci-dessus) :

$$\boldsymbol{\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F;\ x \in E\}}$$

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

- **Fonction**: $f : E \to F$ est dite **fonction** si pour chaque élément $x \in E$ **il existe au plus** un élément correspondant $y \in F$ tel que : $y = f(x)$.

Remarque : *Une application est une fonction particulière. Une fonction n'est pas forcément une application.*

$f : E \to F$ est une ***application*** si tout $x \in E$ a ***une image unique***

$f : E \to F$ est une ***fonction*** si tout $x \in E$ a ***au plus une image***

- **Egalité** : Deux applications f *et* $g : E \to F$ sont égales si et seulement si $\forall\, x \in E$, $f(x) = g(x)$. On écrit : $f = g$.
- **L'identité**: L'identité, notée $id_E : E \to E$, est définie par $x \longmapsto x$.

- **Composition de fonctions**

Soient les deux fonctions $f: E \to F$ et $g: F \to G$

La fonction composée gof est l'application définie par :

$$\begin{aligned} gof :\ & E \to G \\ & x \to g\,of\,(x) = g(f\,(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\,of"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$$x \to f(x) \to g(f(x))$$

Remarque: En général $gof \neq fog$ *par contre la composition est associative,*

$ho(g\,of) = (hog)\,of$.

Exemple : On considère les deux fonctions, f et g, définies ci-dessous.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^* &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g:]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

La fonction $gof : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$g\,of\,(x) = g(f(x)) = \ln(x^2).$$

2.2. Image directe, image réciproque

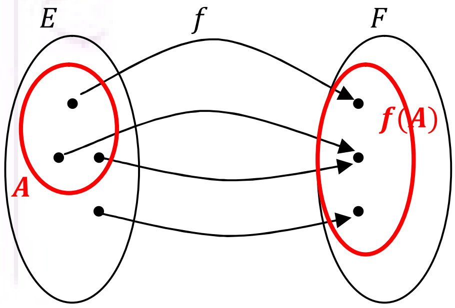
Soient E et F deux ensembles.

- **Image directe**

Soit $f: E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E $(A \subset E)$. L'**image directe de** A par f est l'ensemble défini par :

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

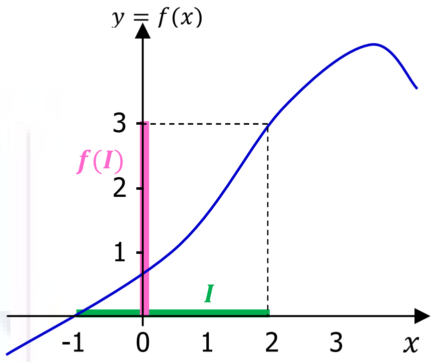
$f(A)$ est un sous-ensemble de F.



N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemples

- Soit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ représentée sur la figure ci-contre.
  L'image directe de l'intervalle $I = [-1,2]$ est :
  $f(I) = \{f(x); x \in I\} = [0,3]$.



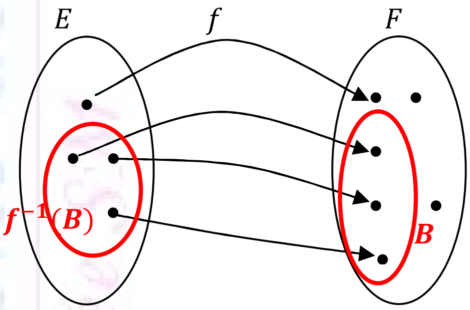
- Soit la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:
  $g(x) = \sin x$.
  On a : $g\left([0,\frac{\pi}{2}]\right) = [0,1]$.   <u>Trouver</u> : $g([0,\pi])$ et $g(\mathbb{R})$.

• Image réciproque

Soit $f: E \to F$ une application et B un sous-ensemble de F $(B \subset F)$. L'**image réciproque de B** par f est l'ensemble défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ ; \ f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.



Exemples

- Dans l'exemple précédent (voir le graphe), l'image réciproque de $[0,3]$ est:
  $f^{-1}([0,3]) = \{x \in E \ ; \ f(x) \in [0,3]\} = [-1,2]$.
- Soit la fonction $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $g(x) = x^2$.
  On a : $g^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}$. $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.
  $g^{-1}([0,4]) = [-2,2]$.
  <u>Trouver</u> : $g(\mathbb{R})$, $g^{-1}(]-\infty,0])$ et $g^{-1}(]-\infty,0[)$.

2.3. Restriction et prolongement

Définitions

- On appelle <u>**restriction**</u> de l'application $f: E \to F$ à A (avec $A \subset E$), l'application $g: A \to F$ telle que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.
- On appelle <u>**prolongement**</u> de l'application $f: E \to F$ à l'ensemble E' contenant E $(E \subset E')$, l'application $g: E' \to F$ dont la restriction est f.

Exemple : On considère les deux applications f et g définies comme suit.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad ; \quad g: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

g est la restriction de f à $]0,+\infty[$. f est le prolongement de g à $\mathbb{R}$.

<u>N.B</u>: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

3. Injection, surjection et bijection

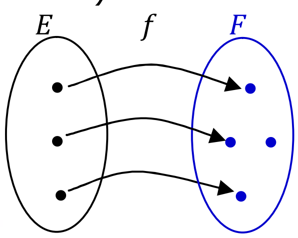
• **Injection :** Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

On dit que f est ***injective*** si pour tout $x,\ x' \in E$, avec $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\forall\, \boldsymbol{x, x' \in E},\ \ \boldsymbol{f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}.$$

Autre formulation: f est injective si et seulement si tout élément y de F a ***au plus* un antécédent** (et éventuellement aucun).

Exemple: L'application f représentée ci-contre est injective.



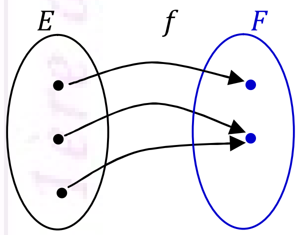
• **Surjection :** Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition : On dit que f est ***surjective*** si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boldsymbol{\forall y \in F,\ \exists x \in E\ \ tel\ que\ y = f(x)}$$

Autre formulation: f est surjective si et seulement si tout élément y de F a ***au moins* un antécédent**. *c-à-d:* $f(E) = F$.

Exemple: L'application f représentée ci-contre est surjective, mais elle n'est pas injective.



• **Bijection :** On dit que f est ***bijective (ou f est une bijection de E sur F)*** si elle injective et surjective au même temps.

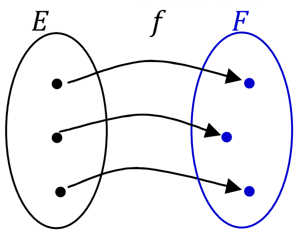
Cela équivaut à: pour tout $y \in F$, **il existe un unique** $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

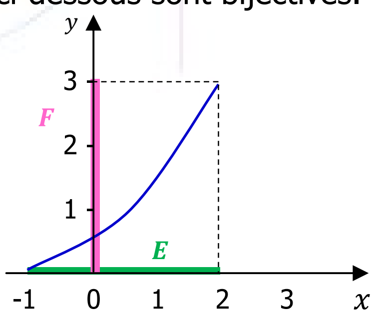
Tout élément y de F a un **unique antécédent** par f .

Autrement dit : $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E\ \ \big(y = f(x)\big)$

L'existence de x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité.

Exemple 1: Les applications représentées ci-dessous sont bijectives.





N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Proposition : Soient E et F deux ensembles et $f: E \to F$ une application.

- L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g: F \to E$ telle que $fog = id_F$ *(*$\forall y \in F,\ f(g(y)) = y$*)* et $gof = id_E$ *(*$\forall x \in E,\ g(f(x)) = x$*).*
- Si ***f* __est bijective__**, alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la **__bijection réciproque__** de f et **est notée f^{-1}***.* De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple 2: L'application $f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = e^x$ est bijective. Sa bijection réciproque est $g:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, elle est définie par :

$g(y) = \ln y = x$.

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ \quad x \mapsto y = e^x \end{array}$$

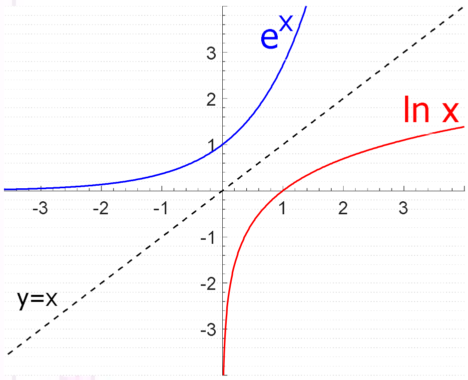
$$\begin{array}{l} f^{-1}:]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto y = \ln x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ \quad x \mapsto y = e^x \end{array}$$

g

$g(y) = \ln y = x$

(**!:** Attention au changement de notation x, y).



Remarque : Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.
Voir l'exemple ci-dessus.

Exemple 3 : Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$.
f n'est ni injective, ni surjective dans $\mathbb{R}$. Donc, elle n'est pas bijective.
En utilisant la représentation graphique, montrer que la __restriction__ de f à la fonction $g: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est injective, surjective et est, donc, bijective.

4. Ensembles finis

4.1. Cardinal

Définition : On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \dots, n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le **cardinal** de E (ou le **nombre d'éléments**) et est noté $Card\ E$.

Exemples

1. $E = \{rouge, bleu\}$ est en bijection avec $\{1, 2\}$. E est de cardinal égal à 2.
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
3. Par définition le cardinal de l'ensemble vide est 0.

__N.B__: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Propriétés :

- Soit A un ensemble fini. Si $B \subset A$, alors B est aussi un ensemble fini et $Card\, B \leq Card\, A$.
- Si A et B sont deux ensembles finis quelconques, alors:
  $Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B) - Card\,(A \cap B)$.

4.2. Injection, surjection, bijection et ensembles finis

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Alors:

1. Si f est injective alors $Card\, E \leq Card\, F$.
2. Si f est surjective alors $Card\, E \geq Card\, F$.
3. Si f est bijective alors $Card\, E = Card\, F$.
3. Si $Card\, E = Card\, F$ *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - ✓ f *est injective,*
   - ✓ f *est surjective,*
   - ✓ f *est bijective.*

4.3. Nombres de sous-ensembles

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Proposition: *Il y a* 2^{CardE} *sous-ensembles de* E *:* $Card\,\wp(E) = 2^n$

Exemple: Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ alors $\wp(E)$ a $2^4 = 16$ parties.

Enumération:
- l'ensemble vide : $\emptyset$,
- 4 ensembles à 1 élément : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
- 6 ensembles à 2 éléments : $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$.
- 4 ensembles à 3 éléments : $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$,
- et E tout entier : $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.4. Coefficients du binôme de Newton

Définition : Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ $ou\ C_n^k$. Avec :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

On donne: $n! = n \times (n-1) \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 1$. Avec : $1! = 1$ et $0! = 1$.

Exemple: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Noter que: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ correspond à la combinaison de k éléments parmi n éléments.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemple: $A = \{a, b, c\}$,

Nombre de combinaisons possibles de 2 éléments: $C_3^2 = 3$ (à énumérer).

Application à l'exemple précédent: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Enumération :• l'ensemble vide (aucun élément) : $C_4^0 = 1$,

• ensembles à 1 élément : $C_4^1 = 4$

• ensembles à 2 éléments : $C_4^2 = 6$

• ensembles à 3 éléments : $C_4^3 = 4$

• ensembles et E tout entier : $C_4^4 = 1$.

Total: 1+4+6+4+1=16 sous-ensembles.

4.5. Formule du binôme de Newton

Théorème : *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* n *un entier positif alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \; b^k$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, appelés **"coefficients binomiaux".**

Autrement dit : $(a+b)^n = C_n^0 \, a^n \; b^0 + C_n^1 \, a^{n-1} \; b^1 + \cdots + C_n^k \, a^{n-k} \; b^k + \cdots + C_n^n \, a^0 \; b^n$

Remarques

- Le théorème ci-dessus est aussi vrai si a et b sont des "*nombres complexes*".
- Si $a = b = 1$, on trouve: $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Exemples:

➢ $(a+b)^2 = C_2^0 \, a^2 \; b^0 + C_2^1 \, a^{2-1} \; b^1 + C_2^2 \, a^{2-2} \; b^2$.

$= a^2 + 2ab + b^2$.

➢ $(a+b)^3 = \cdots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

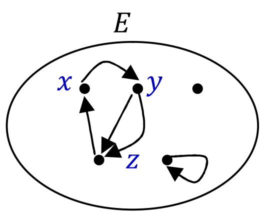
5. Relation d'équivalence

5.1. Définitions

• **Relation:** On définit une **relation, notée** $\mathfrak{R}$, sur un ensemble E par la donnée de tout couple $(x, y) \in E \times E$ de «Vrai» (s'ils sont en relation) ou de «Faux» sinon.

Schématisation:

- Les éléments de E sont représentés par des points.
- Si x est en relation avec y, la relation est schématisée par une flèche de x vers y (on associe «Vrai» au couple (x, y)).



Exemple : Soit E l'ensemble des étudiants de 1ère année SM. Soit $\mathfrak{R}$ une relation de E sur E définie par :

$A\mathfrak{R}B \Leftrightarrow$ "l'étudiant A a le même âge que l'étudiant B".

- **Propriétés :** Soient x, y et z des éléments d'un ensemble E, la relation $\mathfrak{R}$ est dite:

1. **Réflexive** si : $\forall x \in E \implies x\mathfrak{R}x$. Chaque élément est en relation avec lui-même.
2. **Symétrique** si : $\forall x, y \in E, tel\ que\ x\mathfrak{R}y \implies y\mathfrak{R}x$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.
3. **Transitive** si : $\forall x, y, z \in E, tel\ que\ x\mathfrak{R}y\ et\ y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.
4. **Antisymétrique** si : $\forall x, y \in E, tel\ que\ x\mathfrak{R}y\ et\ y\mathfrak{R}x \implies x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.

Remarque : Une relation non-symétrique ne veut pas dire qu'elle est antisymétrique. Elle peut être non-symétrique et non antisymétrique.

Exercice : Quelles sont les propriétés vérifiées par la relation définie dans l'exemple ci-dessus ?

- **Relation d'équivalence:** La relation $\mathfrak{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est à la fois **réflexive, symétrique et transitive.**

5.2. Exemple de relation d'équivalence

Soit E l'ensemble des droites du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient (D) et (D') deux éléments (droites) de E. On considère la relation // (parallèle) sur E définie par :

$$(D)\mathfrak{R}(D') \Leftrightarrow (D)\ //\ (D').$$

Montrer que // est une relation d'équivalence.

- Réflexivité: toute droite (D) est // à elle-même.
- Symétrie: si (D) // (D') alors (D') // (D).
- Transitivité: (D) // (D') et (D') // (D'') alors (D) // (D'').

// est réflexive, symétrique et transitive ⇒ **// est une relation d'équivalence.**

5.3. Classe d'équivalence

Définition: Soit $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. La classe d'équivalence d'un élément x de E, notée $cl(x)$, est l'ensemble des éléments y de E telle que $y\mathfrak{R}x$. $cl(x) = \{y \in E\ ;\ y\mathfrak{R}x\}$.

$cl(x)$ est un sous-ensemble de E.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemple: Considérant la relation "être parallèle" (exemple précédent). La classe d'équivalence d'une droite (D) est l'ensemble des droites qui lui sont //.
A chaque classe correspond <u>une seule direction</u> dans le plan.

Définition : Soit $\Re$ une relation d'équivalence dans un ensemble A. L'ensemble des classes d'équivalence suivant $\Re$, **noté $A/\Re$**, est appelé **quotient de A par la relation $\Re$.**

6. Relation d'Ordre

Définitions

- Une relation $\Re$ sur un ensemble E est dite **relation d'ordre** si elle est à la fois **<u>réflexive, antisymétrique</u>** et **<u>transitive</u>**.
- Une relation $\Re$ dans un ensemble E est dite **d'<u>ordre total</u>** si **tous les éléments de E sont deux à deux comparables.**
  Dans ce cas, l'ensemble E est dit **totalement ordonné.** Dans le cas contraire, il est dit **partiellement ordonné.**

  <u>Exemple</u>: Soit la relation "$\leq$" dans $\mathbb{R}$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, une et une seule des relations suivantes est vraie: $x < y, y = x, x > y$ (tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont deux à deux comparables).

Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.

<u>N.B</u>: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.