Chapitre 3 : Fonctions réelles d'une variable réelle

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références
citées dans la bibliographie de ce cours.

Sommaire

1. Fonctions réelles et domaine de définition

1.1. Définitions: Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$.

- On appelle **fonction réelle** $\boldsymbol{f}$ sur E tout procédé qui, à tout élément réel x de E, permet d'associer au plus un élément réel y de F. y est l'image de x, notée $f(x)$.

  Attention ! : A ne pas confondre la fonction, notée par f, et l'image par f de x, notée $f(x)$.
- Les éléments x de E qui ont une image par f forment l'**ensemble de définition** de la fonction f, noté $\boldsymbol{Df}$. → Voir les exemples ci-dessous.
- Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, elle est dite **fonction numérique à variable réelle**. L'ensemble des fonctions numériques à variable réelle définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté par $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

  On notera cette fonction par $f: I \to \mathbb{R}$ ou $x \mapsto f(x)$.
- Soient f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut définir de nouvelles fonctions $\in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par : $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$

  $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$

  $fg : x \mapsto f(x).g(x)$

Exemples

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $Df = \mathbb{R}_+$.

  L'image du réel 9 par f est $\sqrt{9} = 3$, on dit que 9 est l'antécédent de 3.
- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x^2 - 1) \geq 0$.

  $(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)) \geq 0.$ Donc, $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[= Df$.

Exercice : Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$

On trouve : $Df =]-\infty, -2] \cup]4, +\infty[$.

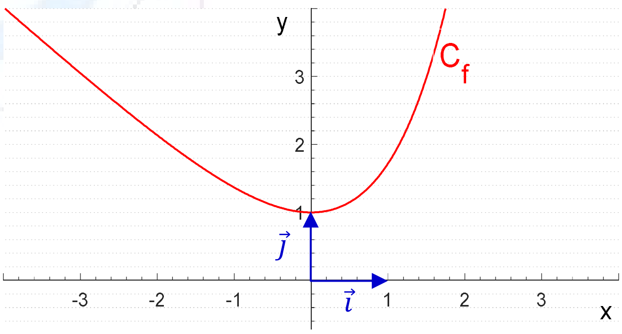
1.2. Représentation graphique d'une fonction

On appelle graphe, ou courbe représentative, d'une fonction f définie sur un intervalle $Df \subset \mathbb{R}$ l'ensemble formé des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $y = f(x)$.

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \,;\; x \in Df \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemple : Graphe de la fonction définie par : $f(x) = e^x - x$

→ Figure ci-contre.



N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1.3. Représentation graphique d'une bijection réciproque

Soit f une fonction **bijective**. Si on pose $y = f(x)$, les points de coordonnées $(x\,,y)$ et $(y\,,f^{-1}(y\,))$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (*voir le chapitre 2*). Donc, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exemple: La fonction définie par $f(x) = e^x$ et sa bijection réciproque, définie par $g(x) = \ln x$.

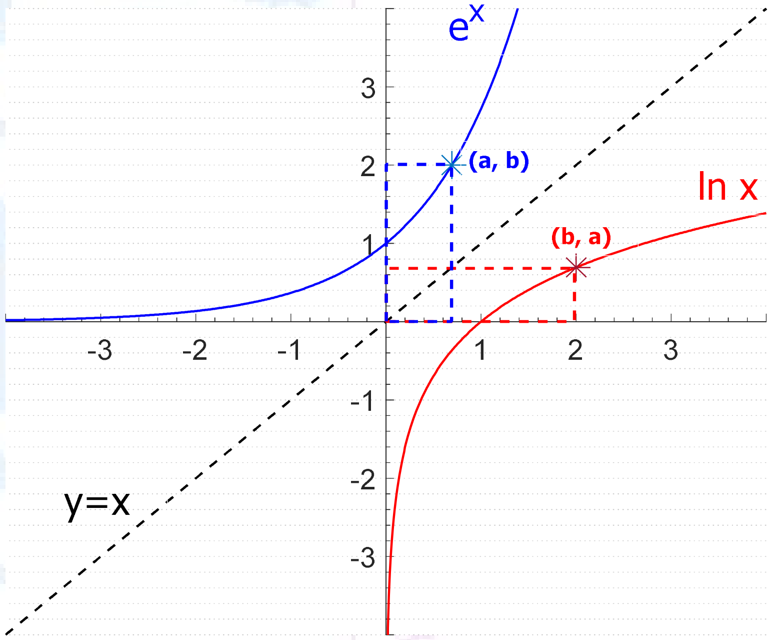
Les graphes de ces fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (figure ci-dessous). Voir par exemple les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & y = e^x \end{array}$$

$g :$

$\mathrm{g}(y) = \ln y = x$

! : Attention au changement de notation y→x pour $f^{-1} = g$.
~ Expliqué en cours ~



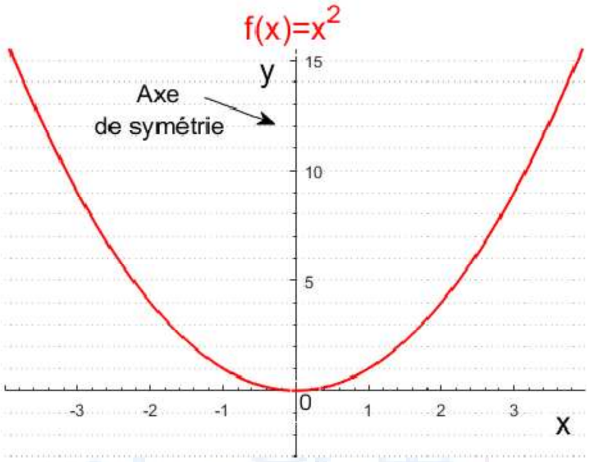
2. Fonctions paires

Définition: Une fonction f est dite **paire** si :

$$\forall x \in Df : f(-x) = f(x)$$

Lorsque la fonction f est paire, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées (OY) comme **axe de symétrie** (Df est un intervalle symétrique par rapport à 0).

Exemple: La fonction $f : x \mapsto x^2$ est paire. Son domaine de définition est $Df = \mathbb{R}$. On peut l'étudier et tracer sa courbe sur $[0,+\infty[$ et la compléter par la suite sur $]-\infty, 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



3. Fonctions impaires

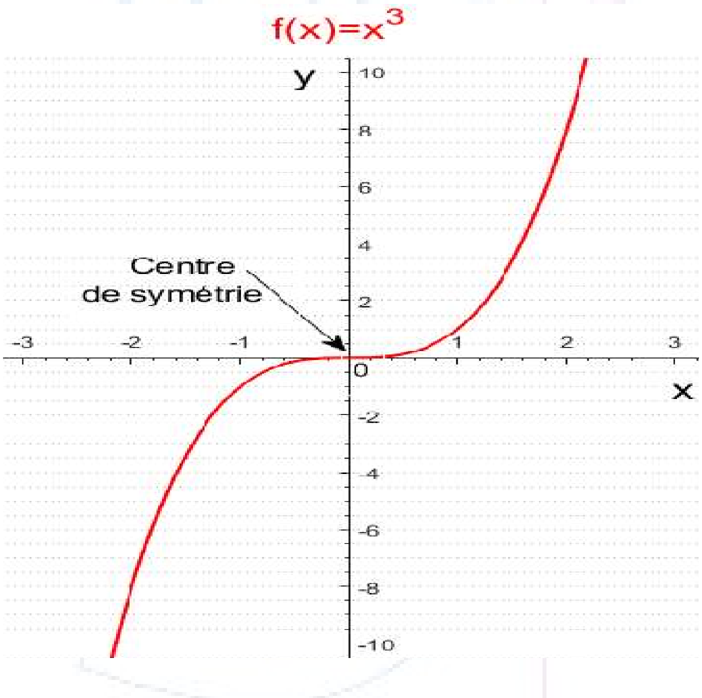
Définition: Une fonction f est dite **impaire** si :

$$\forall x \in Df \;:\; f(-x) = -f(x)$$

Lorsque la fonction f est impaire, sa courbe représentative admet l'origine 0 comme **centre de symétrie** (Df est un intervalle symétrique par rapport à l'origine 0).

Exemple: La fonction $f \;:\; x \mapsto x^3$ est impaire. Domaine de définition : $Df = \mathbb{R}$.

Il suffit de l'étudier et de tracer sa courbe sur $[0, +\infty[$ et la compléter sur $]-\infty, 0]$ par symétrie par rapport à 0.



Remarque: Une fonction donnée n'est pas nécessairement paire ou impaire. Elle peut être ni paire ni impaire.

4. Fonctions périodiques

Définition: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **périodique** s'il existe $T > 0$ tel que:

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

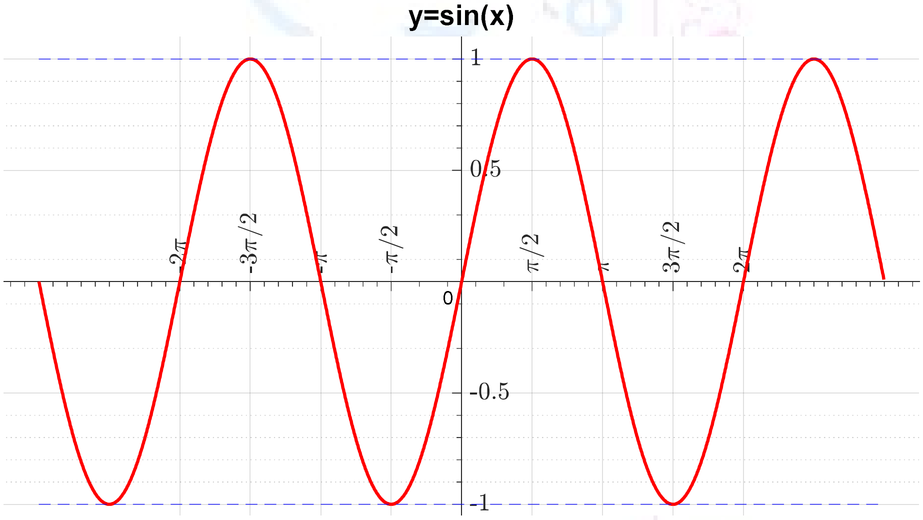
La plus petite valeur de T s'appelle **période** de f. Tous les nombres de la forme kT, $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des périodes pour f.

Exemple: Soit la fonction réelle $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$

f est impaire et périodique (figure ci-dessous).

Période $T = 2\pi$.

La représentation d'une fonction T-périodique dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est invariante par translation de vecteur $T\,\vec{\imath}$ (ou $nT\vec{\imath}$, $n \in \mathbb{Z}$).



5. Composition de fonctions

Soient E, F *et* G des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

La **fonction composée** de f et g , notée $gof : E \to G$ est définie par :

$$gof(x) = g(f(x))$$

Exemple: La fonction $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ est la composée de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ suivie de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ puis de la fonction $x \mapsto \ln x$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

6. Sens de variation d'une fonction réelle

6.1. Définitions

- La fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite **croissante** sur l'intervalle I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, on a:

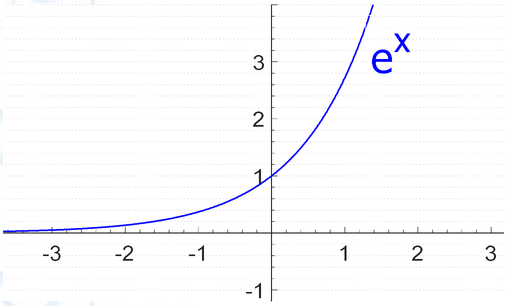
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{ou} \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes, on dit que f est **strictement croissante**.

Exemples

- Fonction exponentielle: $x \mapsto e^x$ (ou $exp(x)$);

$Df = \mathbb{R}$. Voir la figure ci-contre.

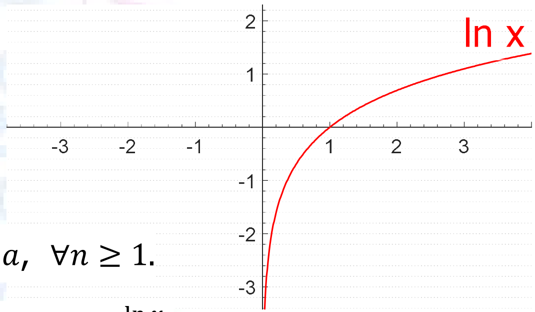


Propriétés : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e^{(a+b)} = e^a\, e^b$

$$e^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{na} = (e^a)^n.$$

- Fonction logarithme népérien: $x \mapsto \ln x$

$Df =]0, +\infty[$. Voir la figure ci-contre.



Propriétés : $\forall\, a, b > 0$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b. \quad \ln(a^n) = n \ln a, \ \ \forall n \geq 1.$$

Logarithme de base *a* : pour $a > 0\ et\ a \neq 1$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- La fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite **décroissante** sur l'intervalle I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$, on a:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{ou} \quad x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes, on dit que f est **strictement décroissante**.

Exemple : La fonction h définie par $h(x) = e^{-x}$ est strictement décroissance.

Tracer le graphe de h.

- La fonction f est dite **monotone** sur l'intervalle I si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.
- La fonction f est dite **strictement monotone** sur l'intervalle I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur cet intervalle.

Remarque: Une fonction peut être ni croissance ni décroissante (elle change de sens de variation sur l'intervalle I).

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

6.2. Propriétés

- Toute fonction strictement monotone est injective.
- Soient $f\ et\ \ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
  - Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante. De plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f+g$ est strictement croissante.
  - Le produit $f.g$ de fonctions monotones n'est pas forcément monotone.
  - La composée fog de deux fonctions monotones de même sens de variation est croissante.
  - La composée fog de deux fonctions monotones de sens de variation opposés est décroissante.

7. Résolution des équations et inéquations avec des valeurs absolues

- **La valeur absolue**

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, est définie comme suit :

$$\begin{cases} |x| = x, & si\ \ x \geq 0 \\ |x| = -x, & si\ \ x < 0 \end{cases}$$ Donc, on a: $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- **Propriétés**

  - $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}\ et\ \forall a \in \mathbb{R}^+, on\ a{:}\ \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x.y| = |x|.|y|$.
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|$.

- **Résolution d'une équation ou une inéquation**

Pour résoudre une équation (expression avec le signe égalité) ou une inéquation (expression avec le signe d'inégalité) avec des valeurs absolues, **on suit les <u>étapes suivantes</u>** :

(1) On étudie d'abord le signe de chacune des fonctions (parties de l'équation ou de l'inéquation) ayant des valeurs absolues.

(2) On résout ensuite l'équation, ou l'inéquation, dans chacun des intervalles où ces fonctions gardent le même signe.

<u>N.B</u>: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+2| = 5$.

On a: $(x+2)$ s'annule pour $x = -2$.

Donc, quand x varie, $(x+2)$ **change de signe** en $x = -2$.

On a: $\begin{cases} |x+2| = x+2 \quad , \quad si\ (x+2) \geq 0. \ \text{c'est à dire si } x \geq -2 \\ |x+2| = -(x+2\,)\,,\ si\ (x+2) < 0. \ \text{c'està dire si } x < -2 \end{cases}$

- Si $x \geq -2$: $\quad |x+2| = 5 \Leftrightarrow x+2 = 5$

  $\Rightarrow x = 3$

- Si $x < -2$: $\quad |x+2| = 5 \Leftrightarrow -(x+2) = 5$

  $\Rightarrow x = -7$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $|x+2| = 5$ est $S = \{-7, 3\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+2| \leq 5$.

- Si $x \geq -2$: $\quad |x+2| \leq 5 \Leftrightarrow x+2 \leq 5$

  $\Rightarrow x \leq 3$, donc $x \in [-2, 3]$.

- Si $x < -2$: $\quad |x+2| \leq 5 \Leftrightarrow -(x+2) \leq 5$

  $\Rightarrow x \geq -7$, donc $x \in [-7, -2[$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x+2| \leq 5$ est:

$S = [-7, -2[\cup [-2, 3] = [-7, 3]$.

8. Fonctions majorées, minorées, bornées

8.1. Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$).

- La partie A est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que: $\forall x \in A,\ x \leq M$.

  On dit que M est un **majorant** de A.

- La partie A est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que: $\forall x \in A,\ x \geq m$.

  On dit que m est un **minorant** de A.

- Le plus petit des majorants de A, s'il existe, est appelé **borne supérieure** de A

- Le plus grand des minorants de A, s'il existe, est appelé **borne inférieure** de A.

Théorème : Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemple : Soit l'ensemble $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}[$. Déterminer pour $\boldsymbol{A}$:

- l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants,
- la borne supérieure, la borne inférieure,
- le maximum et le minimum s'ils existent.

- Ensemble des majorants de A : M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq M$.
  Donc, tout réel ≥ 2 est un majorant de A.
  Ensemble des majorants de A est : $\mathcal{M}_A = [2, +\infty[$.
- Ensemble des minorants de A : m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq m$.
  Donc, tout réel ≤ 0 est un minorant de A.
  Ensemble des minorants de A est : $m_A =]-\infty, 0]$.
- Borne supérieure *(le plus petit des majorants)* : $Sup\ A = 2$.
- Borne inférieure *(le plus grand des minorants)* : $Inf\ A = 0$.
- Maximum de A : $Sup\ A = 2 \notin A$, *donc* $MaxA$ n'existe pas.
- Minimum de A : $Inf\ A = 0 \in A$, *donc* $Min\ A = 0$.

8.2. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions : Soit $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur A ($A \subset \mathbb{R}$).

- On dit que f est **majorée** sur A si $f(A)$ est **majorée**, c'est-à-dire :
  $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, f(x) \leq M$. <u>**M est un majorant**</u> de f sur A.
- On dit que f est **minorée** sur A si $f(A)$ est **minorée**, c'est-à-dire :
  $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A, f(x) \geq m$. <u>**m est un minorant**</u> de f sur A.
- On dit que $\boldsymbol{f}$ **est bornée** sur A si f est **majorée** et **minorée** sur A. C'est-à-dire $f(A)$ est bornée: $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leq f(x) \leq M$.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est <u>minorée sur $\mathbb{R}$</u> mais elle <u>n'est pas majorée</u>.
- La fonction $x \mapsto \sin x$ est <u>bornée sur $\mathbb{R}$</u>.

Propriétés : A partir des définitions ci-dessus, on déduit que:

- Une somme de fonctions majorées est majorée.
- Une somme de fonctions minorées est minorée.
- Une somme de fonctions bornées est bornée.
- Un produit de fonctions bornées est borné.

Interprétation graphique

A travers la représentation graphique d'une fonction f, on déduit que

- La fonction est majorée si son graphe est situé au-dessous d'une droite horizontale.
- La fonction est minorée si son graphe est situé au-dessus d'une droite horizontale.
- La fonction est bornée si son graphe est situé entre deux droites horizontales.

8.3. Maximum et minimum d'une fonction

Définitions

Soit $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur A ($A \subset \mathbb{R}$).

- f admet un maximum sur A s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A$, $f(x) \leq f(a)$.

  Le réel $M = f(a)$ est le **maximum de f sur A.**

  On note : $M = \max_A f$ ou $M = \max f(A)$

- f admet un minimum sur A s'il existe $b \in A$ tel que $\forall x \in A$, $f(x) \geq f(b)$.

  Le réel $m = f(b)$ est le **minimum de f sur A.**

  On note : $m = \min_A f$ ou $m = \min f(A)$.

Remarques

- Un maximum ou un minimum est nécessairement une valeur atteinte par la fonction f.
- Une fonction admettant un maximum est nécessairement majorée.
- Une fonction admettant un minimum est nécessairement minorée.
- Une fonction majorée n'admet pas forcément de maximum.
- Une fonction minorée n'admet pas forcément de minimum.

Exemples

- La fonction $x \mapsto \sin x$ admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}$:

  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ n'admet ni un maximum ni un minimum.

Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.