Chapitre 4: Limites et continuité des fonctions réelles

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références
citées dans la bibliographie de ce cours.

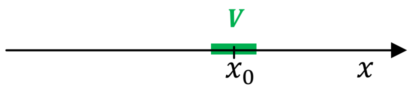
Sommaire

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

1. Limite d'une fonction en un point

1.1. Notion de voisinage

Définition: Une partie V de $\mathbb{R}$ $(V \subset \mathbb{R})$ est un **voisinage du point** $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.



Exemples

- L'intervalle $[-1,1]$ est un voisinage du point $x_0 = 0$.
- L'intervalle $[-1,1]$ est un voisinage de tout point $x_0 \in]-1,1[$.
- La fonction $f(x) = \frac{1}{x-3}$ est définie au voisinage de 3, mais pas en 3.

1.2. Limite finie en un point donné x_0

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pas nécessairement en x_0. On note par Df le domaine de définition de f.

On dit que f admet **une limite $\boldsymbol{\ell}$ en $\boldsymbol{x_0}$**, si :

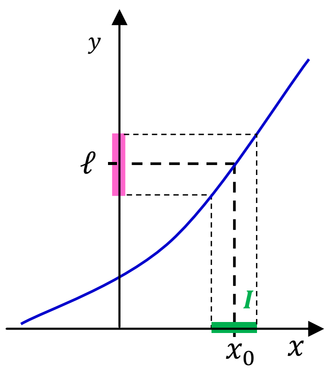
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \ tel\ que\ |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On écrit alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

On dit que $f(x)$ converge vers ℓ lorsque x converge vers x_0 (figure ci-contre). f peut ne pas être définie en x_0.

C'est-à-dire que les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches de ℓ lorsque x s'approche de plus en plus de x_0.



Exemple : Soit f une fonction définie par $f(x) = 3x - 1$.

On a : $Df = \mathbb{R}$. Au point $x_0 = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$|f(x) - \ell| = |f(x) - 2| = |3x - 3| = 3|x - 1| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |x - 1| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, donc $\exists \eta > 0$ $(\eta = \frac{\varepsilon}{3}\ par\ exemple)$ tel que $|x - 1| \leq \eta$.

Théorème (Unicité de la limite)

Soit f une fonction définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si f admet une limite ℓ en x_0, elle est **unique** : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Si f est **définie en $\boldsymbol{x_0}$** et admet une limite en ce point, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

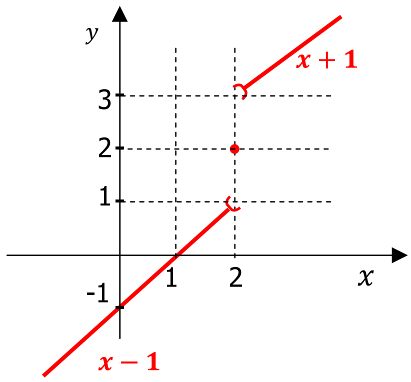
N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

Exemple de fonction qui n'admet pas de limite

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x < 2 \\ 2 & si\ x = 2 \\ x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$$

f n'admet pas de limite en $x_0 = 2$ (figure ci-contre), $\lim_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.



1.3. Limites à gauche et à droite d'un point

On considère les fonctions définies par:

- $f(x) = \sqrt{x}$. $Df = [0, +\infty[$. f est définie en 0, à droite de 0 mais pas à gauche de 0.
- $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. $Dg = \mathbb{R}^*$. g est définie à droite et à gauche de 0 mais pas en ce point.

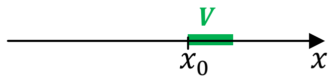
D'où la nécessité de définir :

- ✓ la **limite à droite d'un point x_0,** c'est-à-dire quand $x \overset{>}{\to} x_0$ (ou $x \to x_0^+$).
- ✓ la **limite à gauche d'un point x_0,** c'est-à-dire quand $x \overset{<}{\to} x_0$ (ou $x \to x_0^-$).

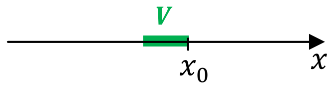
Définitions

Soit f une fonction définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Un domaine V ($V \subset \mathbb{R}$) est dit voisinage à droite d'un point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $[x_0, x_0 + \delta[$ soit inclus dans V.



- Un domaine V ($V \subset \mathbb{R}$) est dit voisinage à gauche d'un point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0]$ soit inclus dans V.



- On dit que f admet ℓ comme **limite à droite de x_0**, c'est-à-dire quand x tend vers x_0^+, si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ tel\ que:\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

  On écrit :

$$\mathbf{lim}_{x\to x_0^+,} \boldsymbol{f(x) = \ell} \text{ ou } \mathbf{lim}_{\substack{> \\ x\to x_0}} \boldsymbol{f(x) = \ell}.$$

- On dit que f admet ℓ comme **limite à gauche de x_0**, c'est-à-dire quand x tend vers x_0^-, si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ tel\ que:\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

  On écrit :

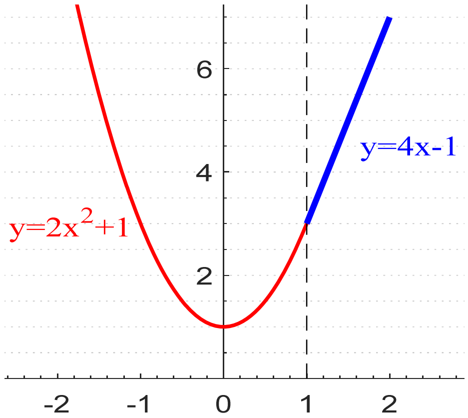
$$\mathbf{lim}_{x\to x_0^-,} \boldsymbol{f(x) = \ell} \text{ ou } \mathbf{lim}_{\substack{< \\ x\to x_0}} \boldsymbol{f(x) = \ell}.$$

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Exemple

Soit f la fonction définie par (figure ci-contre) :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & si\ x < 1 \\ 4x - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$



On a :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (4x - 1) = 3$$

$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = 3.$

Donc, f admet une limite au point $x_0 = 1$.

Remarques

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existent aussi et elles sont égales à cette limite.

  Réciproquement, si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell'$ existent et elles sont égales ($\ell = \ell'$), alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et elle est égale à la valeur commune des deux limites.
- **Si $\boldsymbol{\ell \neq \ell'}$**, la fonction f **n'admet pas de limite** en x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **n'existe pas**.

Important : Lien entre limite simple et limites à gauche et à droite:

On a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

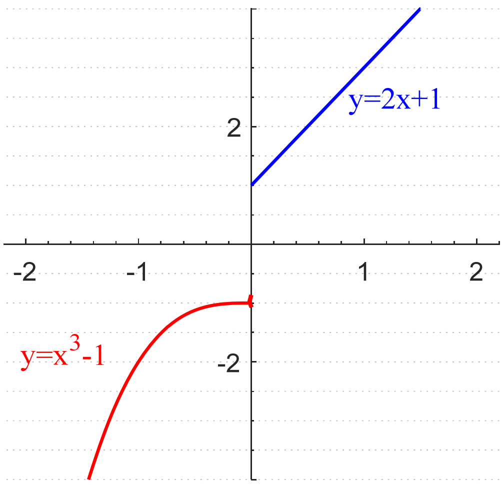
Si, en plus, f **est définie** en x_0 alors $f(x_0) = \ell$.

Exemple

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & si\ x < 0 \\ 2x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Voir la figure ci-contre.



On a : $\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} (x^3 - 1) = -1.$

$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} (2x + 1) = 1.$

$\to \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x).$

Donc, f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$ (pourtant elle est définie en ce point).

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

2. Limites et comportements asymptotiques

2.1. Limite finie à l'infini (Cas où x_0 devient infini : $x_0 \longrightarrow \pm\infty$)

Définitions

- On dit qu'une fonction f, définie dans un intervalle $]a, +\infty[$, possède une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ \ tel\ que : \ \ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  On écrit : $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = \ell}$

  Dans ce cas, la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

- De la même façon, une fonction f, définie dans un intervalle $]-\infty, b[$, possède une limite finie quand x tend vers $-\infty$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ \ tel\ que : \ \ x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  On écrit : $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = \ell}$

  Dans ce cas, la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Exemple

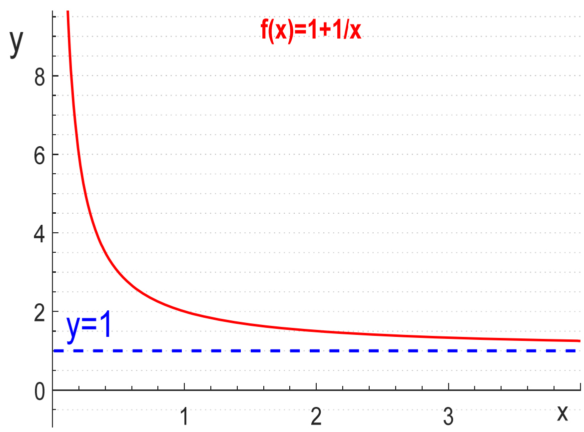
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Les valeurs de $f(x)$ se resserrent et se rapprochent de plus en plus de 1 quand x devient suffisamment grand (figure ci-contre).

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.



2.2. Limite infinie en x_0 fini ($\in \mathbb{R}$)

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$ ou $\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

Exemple

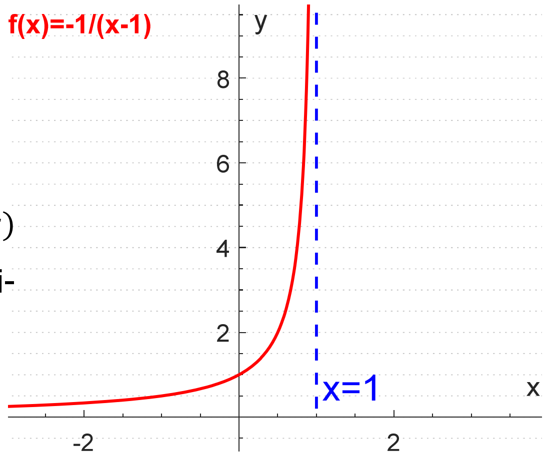
Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{x-1}.$$

On a : $\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = +\infty$.

Quand x se rapproche de 1, les valeurs de $f(x)$ deviennent suffisamment grandes (figure ci-contre).

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.



Remarque

La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une **asymptote oblique** d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ (a et b sont deux réels tel que $a \neq 0$).

- ✓ si $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que cette droite est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
- ✓ si $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit que cette droite est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

2.3. Limite infinie à l'infini (quand $x_0 \longrightarrow \pm\infty$)

Cas où :
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemples

- ➢ Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$.

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: Ceci veut dire que les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes dès que x est suffisamment grand.

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$: Ceci veut dire que les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes dès que x est suffisamment petit.

- ➢ $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

3. Formes indéterminées - Levée de l'indétermination

- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors on ne peut rien dire de $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors on ne peut rien dire de $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, alors on ne peut rien dire de $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, alors on ne peut rien dire de $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))$.

Ces limites, sous formes : "$+\infty - \infty$", "$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\mathbf{0}\times\infty$", sont appelées **formes indéterminées**. Si on peut trouver la limite de l'une de ces formes on dit qu'**on a levé l'indétermination.**

Exemples

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}$. C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination. On a: $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$

2. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. C'est une forme indéterminée $+\infty-\infty$.

On a: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = 0.$

Remarque: Nous verrons d'autres méthodes pour la levée de l'indétermination au 2ème semestre (Matière: Maths 2).

4. Opérations sur les limites (Propriétés)

Soient $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Soit x_0 un point de I.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, alors :

- $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \ell_1+\ell_2$.
- $\lim_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = \ell_1.\ell_2$.
- $\lim_{x\to x_0}\lambda f(x) = \lambda\ell_1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ si $\ell_2\neq 0$.
- Soit $h: I\to\mathbb{R}$ une **fonction bornée**.

  Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to x_0}[h(x).f(x)] = 0$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

5. Limite d'une fonction composée

Théorème

Soient deux fonctions réelles f et g. Soient a, b et ℓ des réels, qui peuvent tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \text{b}$ et $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to a} gof(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \ell$$

Exemples

- On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{x}}$.

  Soit à calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

  On a: $Df = [\frac{1}{3}, +\infty[$.

  La fonction f peut être considérée comme la composée (goh) de la fonction définie par $h(x) = 3 - \frac{1}{x}$ par la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x}$:

  $f(x) = g(h(x))$

  $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(3 - \frac{1}{x}) = 3$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{h\to 3} g(h) = \lim_{h\to 3} \sqrt{h} = \sqrt{3}$.

- Calcul de la limite en $+\infty$ de la fonction définie par :

  $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x + 3}$.

  C'est la fonction définie par $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ composée avec la fonction définie par $h(X) = \sqrt{X}$.

  On a: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

  $\lim_{X\to+\infty} h(X) = +\infty$

  Donc: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - 2x^2 + 5x + 3} = +\infty$

  C'est-à-dire, on fait tendre l'intérieur de la racine vers $+\infty$. Le résultat est $+\infty$. Puis on regarde la limite de la racine de l'infini.

Exercice : Déterminer la limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

On donne: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

6. Continuité des fonctions réelles

6.1. Continuité d'une fonction en un point

Définitions

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, avec $I \subset \mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue au point x_0** $\in I$ si :
  - **(1)** f est **définie** en x_0.
  - **(2)** $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 :

    $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

    C'est-à-dire :

    $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ tel\ que : \ \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

- f est dite **discontinue** en x_0 si elle n'est pas continue en x_0.
- On dit que la fonction f est **continue sur l'intervalle** I, si f est continue en tout point $x \in I$.

Exemples

- Les fonctions polynomiales, e^x et $\sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-3}$ n'est pas continue en 3 (non définie en ce point).

Théorème

Soient $f \ et \ g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

✓ Si f et g sont continues en x_0, alors les fonctions $\boldsymbol{f + g}$ et $\boldsymbol{f.g}$ sont aussi continues en x_0.

✓ Si en plus $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction quotient $\boldsymbol{f/g}$ est continue en x_0.

6.2. Continuité à gauche et à droite d'un point

Définitions

- Une fonction f est dite **continue à gauche** en x_0 si, pour $x \leq x_0$, on a:

  $$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

  C'est-à-dire si et seulement si:

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \ tel\ que : \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- Une fonction f est dite **continue à droite** en x_0 si, pour $x \geq x_0$, on a:

  $$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

  C'est-à-dire si et seulement si:

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \ tel\ que : \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

- Une fonction f est **continue en x_0** si et seulement si elle est **continue à gauche et à droite** du point x_0.

$$\boldsymbol{f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)}$$

- La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **uniformément continue** sur l'intervalle I (en tout point de I) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \ tel\ que\ \forall\, x, x' \in I,\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Exemples

(1) Soit f la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si\ x < 1 \\ 4x - 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Etudions la continuité de cette fonction en 1.

f est définie en 1. On a : $f(1) = 3$.

Continuité à gauche: $\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} (2x + 1) = 3 = f(1)$

Donc, f est continue à gauche en 1.

Continuité à droite: $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} (4x - 1) = 3 = f(1)$

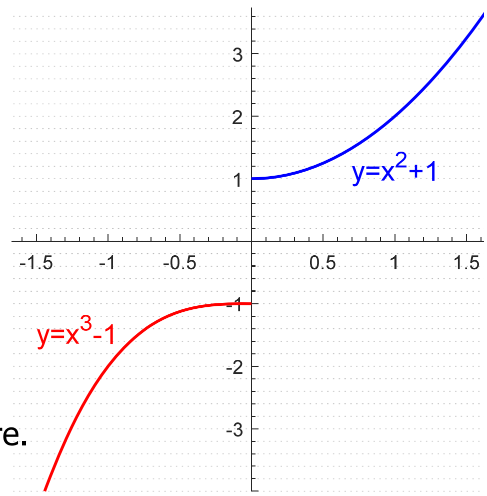
Donc, f est continue à droite en 1.

Comme $\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = f(1)$, c'est-à-dire f est continue à gauche et à droite en 1. Donc, f est continue en 1.

(2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & si\ x < 0 \\ x^2 + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Etudions la continuité de cette fonction en 0.

f est définie en 0. On a : $f(0) = 1$.



Continuité à droite de 0:

$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} (x^2 + 1) = 1 = f(0)$

Donc, f est continue à droite en 0.

Continuité à gauche de 0:

$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} (x^3 - 1) = -1 \neq f(0)$

Donc, f n'est pas continue à gauche en 0.

$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) \neq \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x)$. $\rightarrow$ Voir la figure ci-contre.

Donc, f n'est pas continue au point $x_0 = 0$.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

6.3. Continuité d'une fonction composée

Définitions

- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 et si $g : F \to \mathbb{R}$ est continue en $X_0 = f(x_0)$ (avec $f(E) \subset F$), alors gof est continue en x_0.
- Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle I et si g est continue sur $f(I)$, alors gof est continue sur I.

7. Prolongement par continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$, c'est-à-dire non-définie au point $x_0 \in I$ $(I \subset \mathbb{R})$ et, par conséquent, non-continue en ce point.

Si f admet une limite finie, notée ℓ, au point x_0, alors la nouvelle fonction g définie par:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I - \{x_0\} \\ \ell & si\ x = x_0 \end{cases}$$

est dite **prolongement par continuité** de f au point x_0.

La fonction g est continue en x_0 et est définie sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$

Cette fonction est définie et continue en tout point $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ (quotient de deux fonctions continues). Elle n'est pas continue en 2, puisqu'elle n'est pas définie en ce point.

Comme $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$, c'est-à-dire que f admet une limite finie en 2, on peut définir une nouvelle fonction g par:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 12 & si\ x = 2 \end{cases}$$

g* est le prolongement par continuité de *f au point 2 (g est continue en 2).

g est définie et est continue sur $\mathbb{R}$.

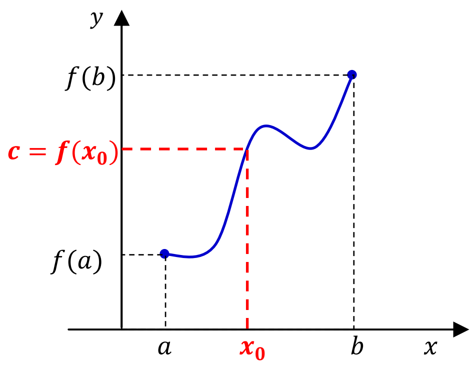
N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

8. Propriétés des fonctions continues

8.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (figure ci-contre). Si f est continue, alors elle atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall c \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a,b] \; tel \; que \; f(x_0) = c$$



C'est-à-dire qu'une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Son graphe ne présente aucune discontinuité entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Remarques

- Si la fonction f est **strictement monotone** sur $[a,b]$, **le point x_0 est unique**.
- Si la fonction f **est continue** sur $[a,b]$ et si $\boldsymbol{f(a).f(b)} < 0$, il existe alors au moins un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

  Ceci constitue une *variante au théorème des valeurs intermédiaires* (cas où $c = 0$) qui permet de résoudre certaines équations numériques de type $f(x) = 0$.

  Ceci veut dire que si $f(x)$ change de signe quand x passe de a à b, elle doit passer nécessairement par 0 (au moins une fois) puisqu'elle est continue. f ne peut pas changer de signe sans s'annuler.

  Si, en plus, f est **strictement monotone** (bijective), l'équation $f(x) = 0$ admet une **solution unique**.

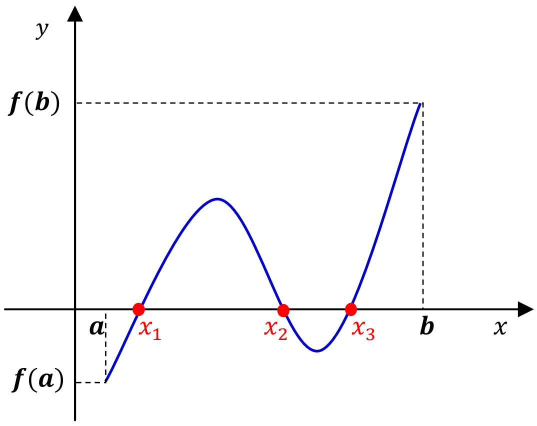
  Attention !: Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) > 0$, ceci ne veut pas dire que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions sur $[a,b]$. Dans ce cas, on ne peut rien dire tout simplement. Par contre si, en plus, f est monotone, on peut conclure que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions sur $[a,b]$.

Exemple

Soit f la fonction représentée sur la figure ci-contre. f est continue sur $[a,b]$ et on a :

$f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

Donc : $f(a).f(b) < 0$.



N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

Cela veut dire que le graphe de f coupe l'axe des abscisses <u>au moins une fois</u> sur $[a, b]$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Dans cet exemple, le graphe de f coupe l'axe des abscisses 3 fois. Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions (x_1, x_2 et x_3).

Exercice : Soit $y = x^4 - 3x + 1$.

L'équation $y = 0$ admet-elle des solutions sur $[0,1]$.

8.2. Fonctions réciproques

Théorème:

Soit f une fonction **<u>continue</u> et <u>strictement monotone</u>** sur un intervalle I $(\subset \mathbb{R})$. Alors :

- L'image directe $f(I) = J$ est un intervalle de même nature que I (fermé, ouvert ou semi-ouvert). Ses extrémités sont les limites de f au extrémités de I.
- La fonction f définit une bijection de f sur $f(I) = J$. Elle admet donc une **fonction réciproque**, notée f^{-1}, de J dans I.

$$\begin{matrix} \boldsymbol{x \in I} \\ \boldsymbol{y = f(x)} \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y \in J} \\ \boldsymbol{x = f^{-1}(y)} \end{matrix}$$

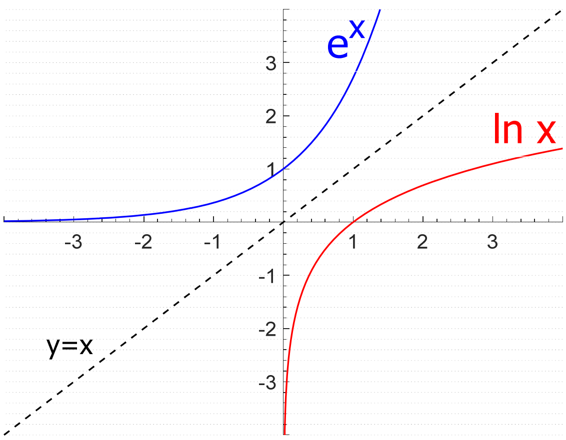
La fonction f^{-1} est continue et est strictement monotone sur J (de même sens de monotonie que f).

Remarque

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Exemple

Graphes de la fonction e^x et de sa réciproque $\ln x$ (figure ci-contre).



Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.

<u>N.B</u>: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.