Chapitre 5: Fonctions Trigonométriques et Hyperboliques

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références
citées dans la bibliographie de ce cours.

Sommaire

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1. Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

1.1. La fonction "sinus" et sa réciproque "arcsinus" (ou $\sin^{-1}$)

La fonction $x \longmapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue, périodique et non-monotone. Elle n'est pas bijective sur son domaine de définition.

Sa restriction, sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, est strictement croissance. Elle est **bijective**.

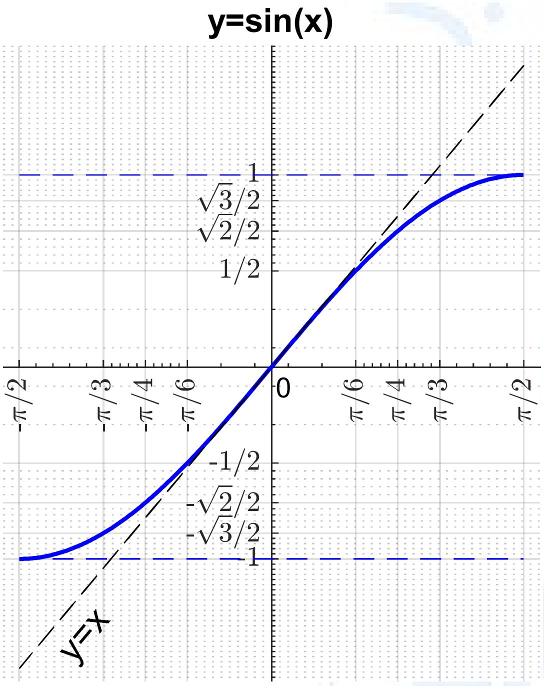
$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1;1]$$
$$x \longmapsto y = \sin x$$

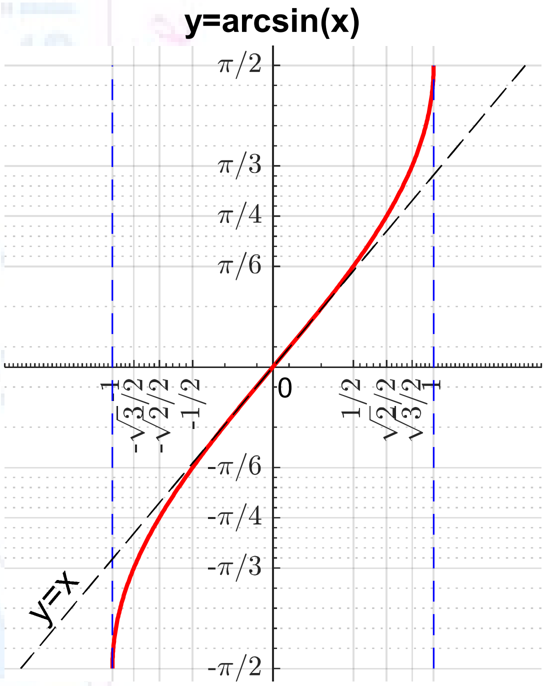
Donc, elle admet une fonction inverse (bijection réciproque), notée $\mathbf{sin^{-1}}$ ou $\mathbf{arcsin}$, définie par: $\mathbf{arcsin}\colon [-\mathbf{1},\mathbf{1}] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\boldsymbol{x \longmapsto y = \arcsin x}$$

La fonction $\arcsin$ est continue et est strictement croissante.

Les graphes des fonctions $\sin$ et $\arcsin$ (figures ci-dessous) sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.





Pour des raisons de clarté, ces graphes sont tracés séparément.

Propriétés

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1,1],\ y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1],\ \sin(\arcsin x) = x$
- Dérivée: $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1.2. La fonction "cosinus" et sa réciproque "arccosinus" (ou $\cos^{-1}$)

La fonction $x \longmapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue, périodique et non-monotone. Elle n'est pas bijective sur son domaine de définition.

Sa restriction, sur $[0, \pi]$, est strictement décroissance. Elle est **bijective**.

$$\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto y = \cos x$$

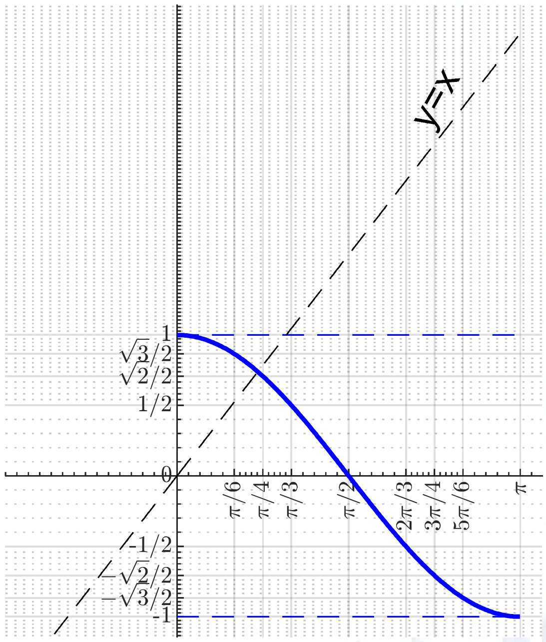
Donc, elle admet une fonction inverse (bijection réciproque), notée $\mathbf{cos^{-1}}$ ou $\mathbf{arccos}$, définie par: $\mathbf{arccos}: [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \longrightarrow [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{arccos}\, \boldsymbol{x}$$

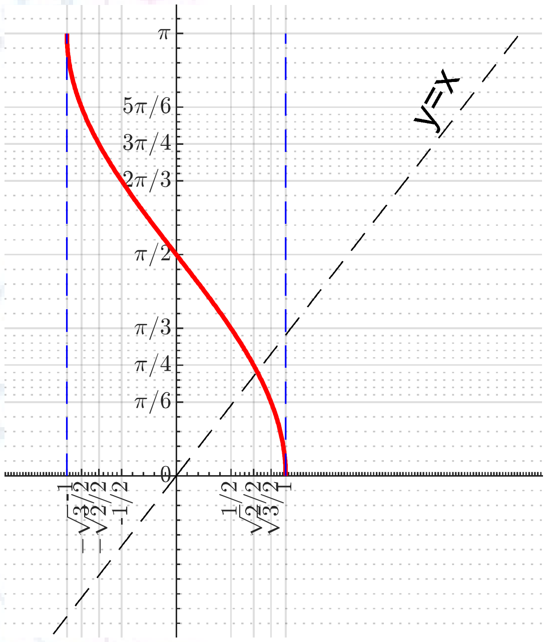
La fonction $\arccos$ est continue et est strictement décroissante.

Les graphes des fonctions $\cos$ et $\arccos$ (figures ci-dessous) sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.

y=cos(x)



y=arccos(x)



Pour des raisons de clarté, ces graphes sont tracés séparément.

Propriétés

- $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1,1],\ y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$
- $\forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1],\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in [-1,1],\ \cos(\arccos x) = x$
- Dérivée: $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1.3. La fonction "tangente" et sa réciproque "arctangente" (ou $\tan^{-1}$)

La fonction $x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie pour $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Elle n'est pas bijective sur son domaine de définition.

Sa restriction, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est continue et est <u>strictement croissance</u>. Elle est **bijective**.

$$\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan x$$

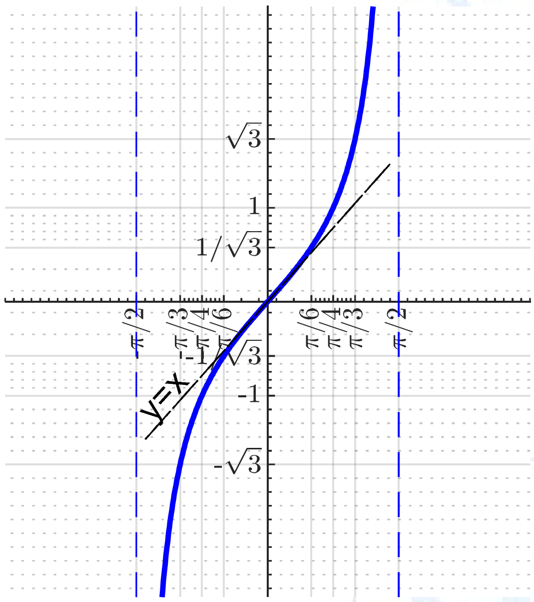
Donc, elle admet une fonction inverse (bijection réciproque), notée $\mathbf{tan^{-1}}$ ou $\mathbf{arctan}$, définie par: $\mathbf{arctan}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\boldsymbol{x \longmapsto y = \arctan x}$$

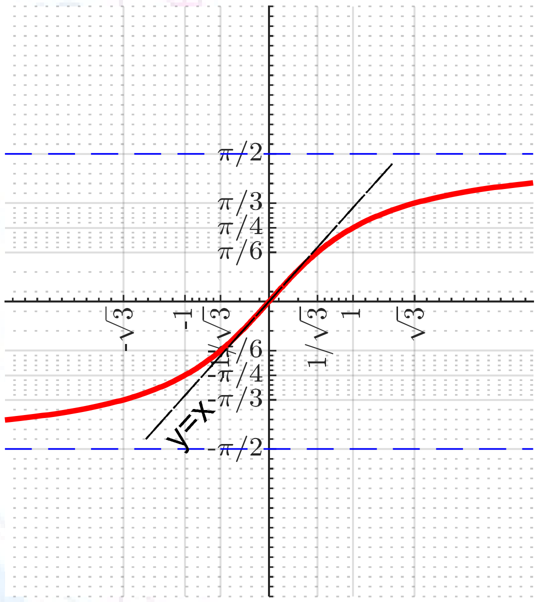
La fonction $\arctan$ est continue et est strictement croissante.

Les graphes des fonctions $\tan$ et $\arctan$ (figures ci-dessous) sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.

y=tan(x)



y=arctan(x)



<u>Pour des raisons de clarté, ces graphes sont tracés séparément.</u>

Propriétés

- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$
- Dérivée: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1.4. La fonction "cotangente" et sa réciproque "arccotangente" (ou cotan^{-1})

La fonction $x \longmapsto \mathrm{cotan}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ est définie pour $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire pour tout réel $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Elle n'est pas bijective sur son domaine de définition.

Sa restriction, sur $]0, \pi[$, est <u>strictement décroissance</u>. Elle est **bijective**.

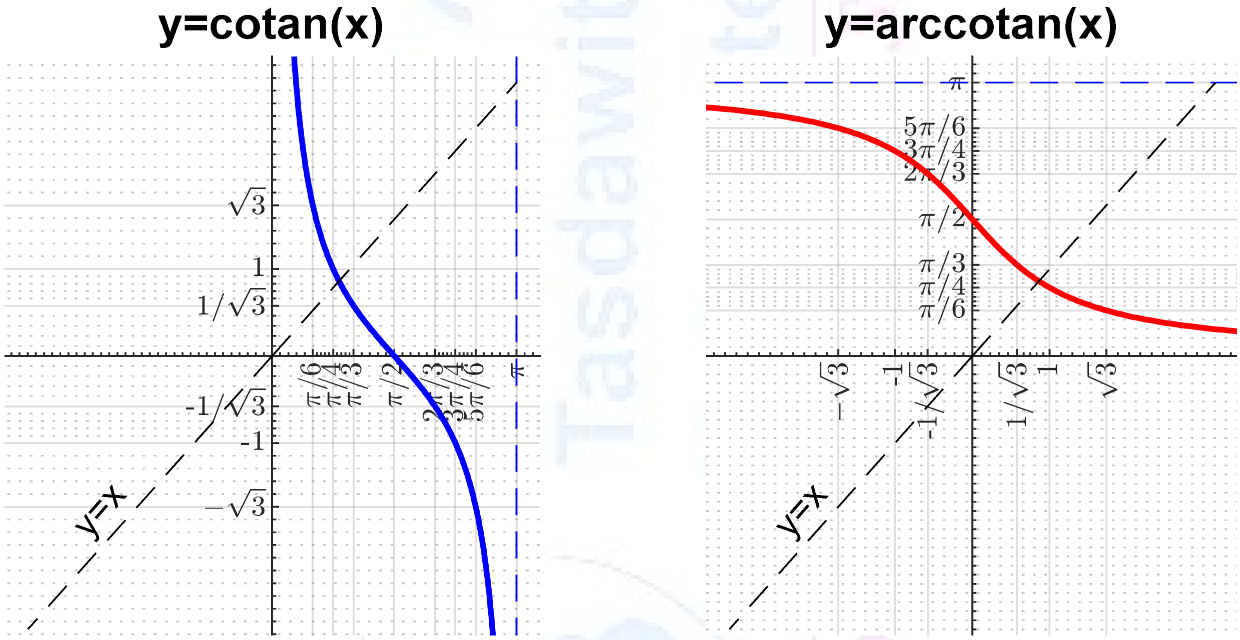
$$\begin{aligned} \mathrm{cotan}\colon]0,\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \mathrm{cotan}\, x \end{aligned}$$

Donc, elle admet une fonction inverse (bijection réciproque), notée $\mathbf{cotan}^{-1}$ ou $\mathbf{arccotan}$, définie par: $\mathbf{arccotan}\colon \mathbb{R} \longrightarrow]\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}[$

$$\boldsymbol{x \longmapsto y = \mathbf{arccotan}\, x}$$

La fonction $\mathrm{arccotan}$ est continue et est strictement décroissante.

Les graphes des fonctions cotan et $\mathrm{arccotan}$ (figures ci-dessous) sont symétriques par rapport à la première bissectrice, d'équation $y = x$.



<u>Pour des raisons de clarté, ces graphes sont tracés séparément.</u>

<u>N.B</u>: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

2. Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

2.1. La fonction "Cosinus hyperbolique" et sa réciproque "Argument cosinus hyperbolique"

La fonction "cosinus hyperbolique" est définie comme suit : $\mathbf{ch}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

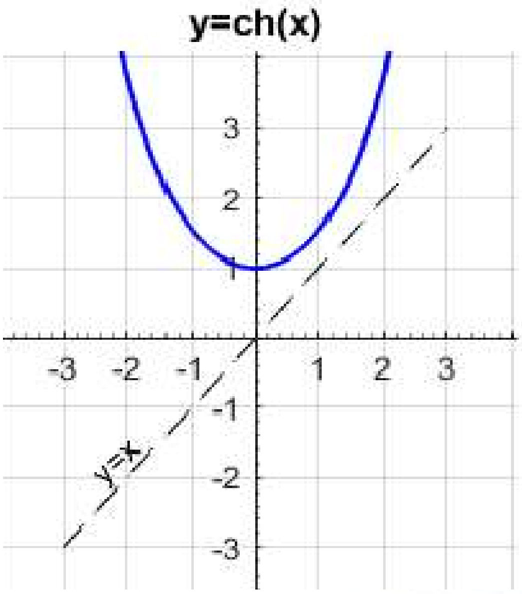
C'est une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$ et non-monotone. Elle n'est pas bijective.

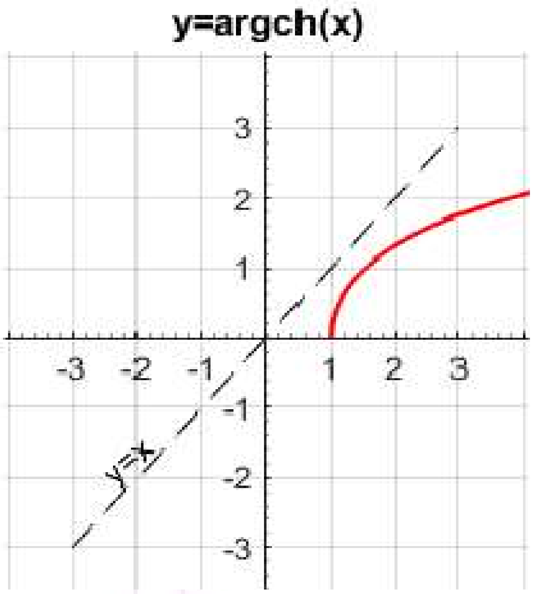
Sa restriction $\operatorname{ch}: [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est **bijective**. Sa bijection réciproque, notée $\mathbf{Argch}$ (*Argument cosinus hyperbolique*), est définie par:

$$\mathbf{Argch}: [\mathbf{1}, +\infty[\longrightarrow [\mathbf{0}, +\infty[$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{Argch}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}\right).$$ Voir les figures ci-dessous.

Dérivée: $\forall x \in]1, +\infty[,\ \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.





2.2. La fonction "Sinus hyperbolique" et sa réciproque "Argument sinus hyperbolique"

La fonction "sinus hyperbolique" est définie comme suit : $\mathbf{sh}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et **bijective**.

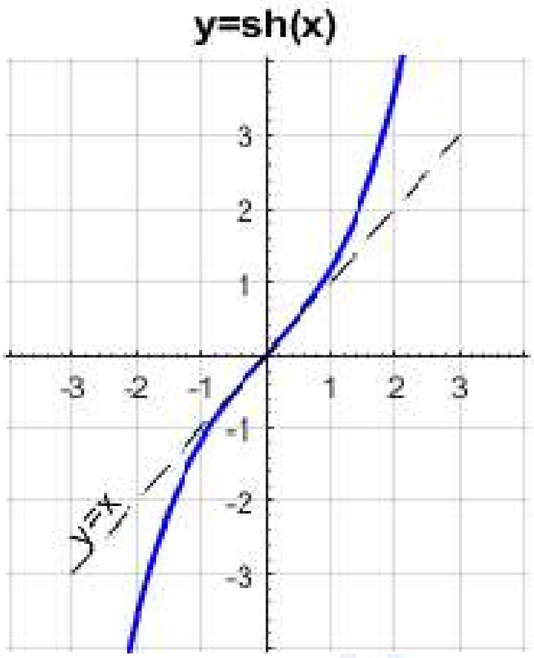
Sa bijection réciproque, notée $\mathbf{Argsh}$ (*Argument sinus hyperbolique*), est définie par:

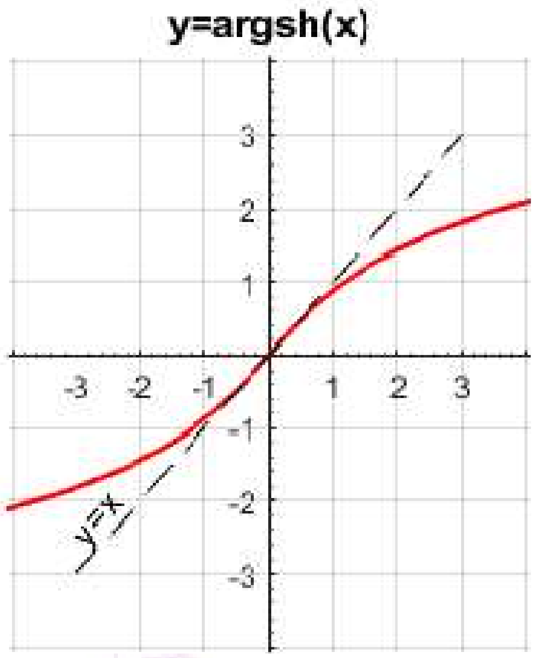
$$\mathbf{Argsh}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{Argsh}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}\right).$$ Voir les figures ci-dessous.

Dérivée: $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*





2.3. La fonction "Tangente hyperbolique" et sa réciproque "Argument tangente hyperbolique"

La fonction "tangente hyperbolique" est définie par : $\mathbf{th}\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$

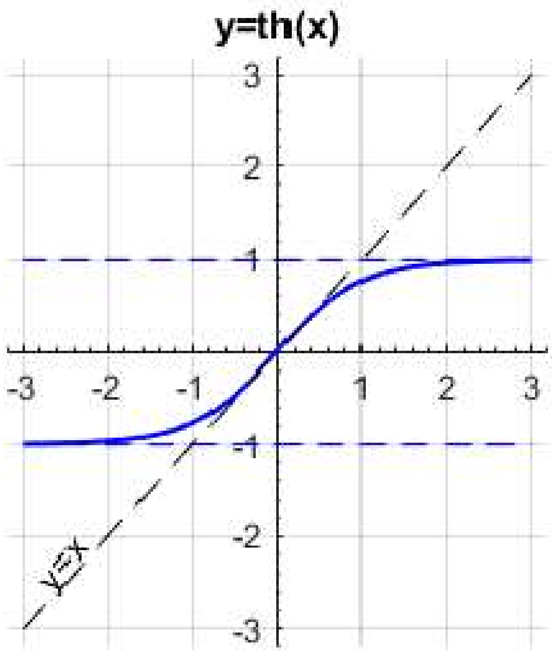
$$x \longmapsto y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

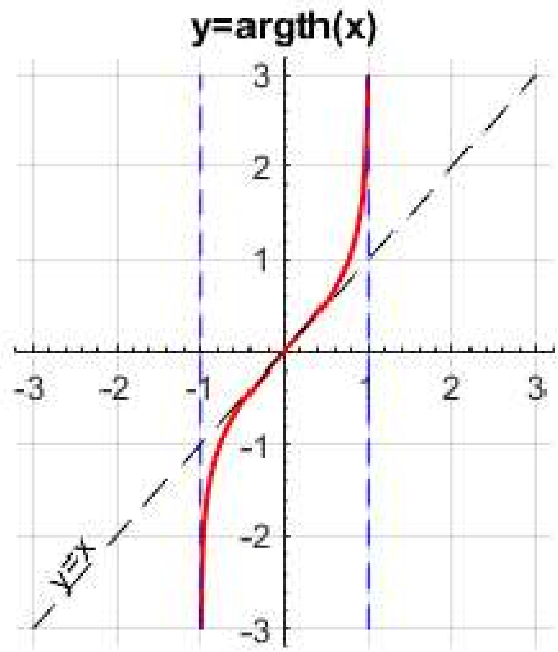
C'est une fonction <u>impaire</u>, continue sur $\mathbb{R}$ et **bijective**. Sa bijection réciproque, notée $\mathbf{Argth}$ (*Argument tangente hyperbolique*), est définie par:

$$\mathbf{Argth}\colon]-\mathbf{1},\mathbf{1}[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{Argth}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ln\left(\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}\right).$$ Voir les figures ci-dessous.

<u>Dérivée</u>: $\forall x \in]-1,+1[,\ \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$





<u>N.B</u>: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

2.4. La fonction "Cotangente hyperbolique" et sa réciproque "Argument cotangente hyperbolique"

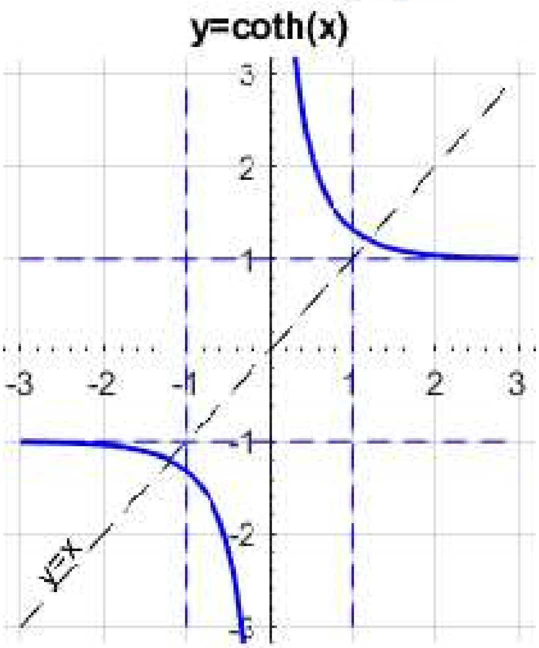
La fonction "cotangente hyperbolique" est définie comme suit :

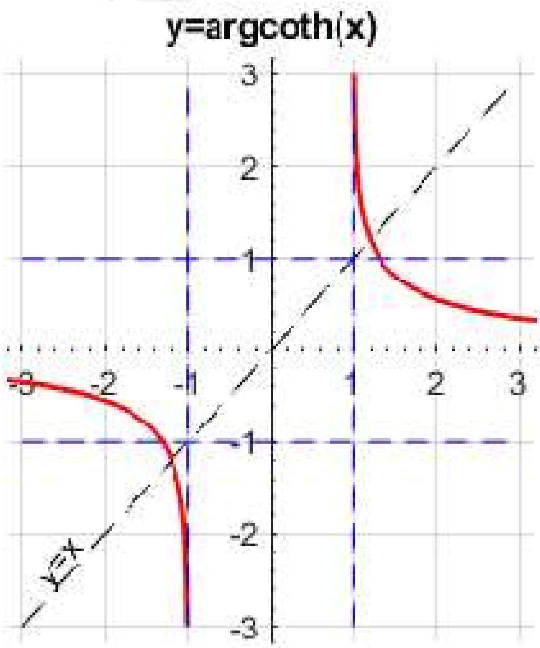
$$\mathbf{coth}: \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$
$$x \longmapsto y = \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

La fonction $\coth$ est bijective dans chacun des deux sous-domaines où elle est continue, $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Sa fonction réciproque, notée $\mathbf{Argcoth}$ (*Argument cotangente hyperbolique*), est définie par :

$$\mathbf{Argcoth}:]-\infty,-\mathbf{1}[\cup]\mathbf{1},+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{Argcoth}\,\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ln\left(\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\right).$$

Voir les figures ci-dessous.





Quelques propriétés

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Dérivation: $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}'(x)$

$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}'(x)$;

$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.