Chapitre 6 : Lois de composition et Structures algébriques fondamentales

Ce cours est principalement destiné aux étudiants de 1ère année SM et ST.
Certaines démonstrations ont été supprimées intentionnellement.
Si besoin, l'étudiant les trouvera dans des références
citées dans la bibliographie de ce cours.

Sommaire

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.

1. Loi de composition interne

1.1. Définitions

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **loi de composition interne** sur E (notée "$*$" par exemple) une application de $E \times E$ dans E qui au couple (x, y) associe $x*y$.

  On écrit: $* : E \times E \to E$
  $(x, y) \to x * y$

  La notation $(E, *)$ signifie : l'ensemble E muni de la loi interne $*$.

  Exemples:

  - La loi "**+**" (l'addition) est une loi interne sur $\mathbb{N}$.
    Pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on a : $x+y \in \mathbb{N}$.
  - La loi "**-**" (la soustraction) n'est pas une loi interne sur $\mathbb{N}$.
    Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $x-y$ n'appartient pas toujours à $\mathbb{N}$.

- On dit qu'on a une **loi de composition externe** de F sur E si on se donne une application de $F \times E$ dans E qui au couple (β, x) associe βx. Dans ce cas, on dit que F agit sur E. Les éléments de F sont appelés « **opérateurs** ».

Exemples

- Les lois définies par l'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$ sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont des lois de composition internes.
- La multiplication d'un vecteur par un scalaire (nombre réel) est une loi de composition externe dont les résultats sont des vecteurs.

1.2. Propriétés

Soient $x,\ y,\ z \in E$ et "$*$" une loi interne sur l'ensemble E.

- La loi "$*$" est dite **associative** si :

$$\forall\, x,\ y,\ z \in E,\ (x*y) * z = x*(y * z).$$

- La loi "$*$" est dite **commutative** si :

$$\forall\, x,\ y \in E,\ x*y = y*x.$$

- La loi "$*$" admet sur E un **élément neutre**, noté e, si:

$$\forall\, x \in E,\ x*e = e*x = x.$$

  Théorème (Unicité de e): L'élément neutre, lorsqu'il existe, est unique.

  Démonstration : Soient e et e' deux éléments neutres sur E.

  On a : $e' = e' * e = e * e' = e$. Donc : $e' = e$.

- L'élément $x \in E$ admet un **élément symétrique**, noté $x'(\in E)$, si la loi "$*$" admet un élément neutre e et si : $x*x' = x'*x = e$.

  Théorème (Unicité de x'): Le symétrique x' de $x \in E$ est unique pour la loi "$*$".

  Démonstration: Soient x' et x'' deux symétriques de x.

  On a : $x' = e * x' = (x'' * x) * x' = x'' * (x * x') = x'' * e = x''$.

  Donc : $x' = x''$.

- Soient "$*$" et "T" deux lois internes sur E.

  On dit que la loi **"$*$" est distributive par rapport à "T"** si :

  $$\forall (x, y, z) \in E^3,\ x*(y\,T z) = (x*y)T(x*z)\ \ et\ (yTz)*x = (y*x)\,T(z*x).$$

  Exemple: La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$ dans $\mathbb{Z}$.

2. Structures algébriques fondamentales

2.1. Groupes

Définitions

- On appelle **groupe** tout ensemble G muni d'une loi interne $*$, **noté** $(G, *)$, vérifiant les propriétés suivantes :

  1. $*$ est associative,

  2. $*$ admet un élément neutre,

  3. tout élément de G admet un élément symétrique pour $*$.

  Si, en plus, la loi $*$ est commutative, on dit que **le groupe $(G, *)$ est *commutatif* ou *abélien*.**

- Un sous-ensemble H de l'ensemble G ($H \subset G$) est un **sous-groupe** de G si la loi $*$ lui est interne et satisfait les propriétés **1.**, **2.** et **3.** ci-dessus. Le sous-groupe $(H, *)$ est aussi un groupe.

Exemples

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes commutatifs (abéliens) d'élément neutre 0.
- $(\mathbb{Q}^*, \times)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs d'élément neutre 1.

Exercice

Montrer que $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.

N.B: *Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.*

2.2. Anneaux

Définition

On appelle **anneau** tout ensemble A muni de deux lois internes $*$ et T, **noté** $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{*}, \boldsymbol{T})$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $(A, *)$ est un groupe commutatif d'élément neutre 0_A.
2. T est associative,
3. A possède un élément neutre pour T,
4. T est distributive sur $*$.

Si, en plus, la loi T est commutative, on dit que **l'anneau $(A, *, T)$ est *commutatif*.**

Exemples

$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.

2.3. Corps

Définition

On appelle **corps** tout anneau *commutatif* $(\mathbb{K}, *, T)$ dans lequel tout élément non nul est inversible pour T.

Exemples

$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.

Définition

Un **sous-corps** d'un corps $\mathbb{K}$ est une partie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, stable par $*$ et T, telle que $\mathbb{L}$ munie des lois induites ($*$ et T) soit un corps.

Exemples

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ qui est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$. $\mathbb{Q}$ est le plus petit des sous-corps de $\mathbb{C}$.

Références bibliographiques : Voir la liste globale des références.

N.B: Notes de cours en phase d'enrichissement/correction.