Série de TD n°01

Exercice n°1

On considère les assertions suivantes :

a. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$ **b.** $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0$

c. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0$ **d.** $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2>x$

Pour chacune de ces assertions, dire si elle est vraie ou fausse puis donner sa négation.

Exercice n°2

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels).

Exercice n°3

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2-x+1$.

Exercice n°4

1. L'implication suivante est-t-elle vraie ou fausse ? Donner sa contraposée.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \Rightarrow\ n>3.$

2. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair. Avec : $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°5

Soit $n>0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice n°6

Démontrer par récurrence que : **1.** $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n>n$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n-1)$ est divisible par 9.

Exercices Supplémentaires

(*Ces exercices ne seront pas corrigés en TD mais il est fortement recommandé de les faire*)

Exercice n°7

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.

2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n=4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1,3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Exercice n°8

Démontrer que : **1.** $\forall n \in \mathbb{N},\ (4^n-1)$ est divisible par 3.

2. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2^{n-1} \leq\ n!\ \leq n^n$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}-\{0,1,2,3\}$, on a : $n^2 \leq 2^n$.