Série de TD n°02

Exercice n°1

On considère les ensembles E et F définis comme suit :

$$E = \{nombres\ entiers\ compris\ entre\ \sqrt{2}\ \ et\ 2\pi\ \}\ ; \quad F = \{3, 5, 7\}$$

1. Ecrire l'ensemble E en donnant tous ses éléments.

2. Déterminer $E \cap F$ et $E \cup F$.

3. a. Donner l'ensemble des parties de F.

b. Trouver une partition de F.

4. On note : $G = E \cap F$. Déterminer les produits cartésiens $E \times G$ et $G \times E$.

Exercice n°2

Soit l'application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

1. a. Déterminer l'image directe de $A = [-1, 4]$ par f.

b. Déterminer l'image réciproque de A par f.

2. Soient $B = \{1\}$ et $C = [1,2]$.

Déterminer : $f(B)$, $f(C)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C)$.

Exercice n°3

Soit $f: I \longrightarrow J$ une application définie par $f(x) = x^2$.

On considère les cas suivants: **a.** $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.

b. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.

c. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.

d. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

1. Dans chacun de ces cas, f est-elle injective ? est-elle surjective ?

Recommandation : utiliser la représentation graphique pour chaque cas.

2. Quels sont les cas où f est bijective ? justifier votre réponse.

Exercice n°4

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ définie par: $f(x) = \sin(\pi x)$

1. Cette application est-elle injective ? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est une bijection de I sur $]-1, 1[$.

Exercice n°5

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. Calculer : $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(2)$, $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.

2. f est-elle injective ? f est-elle surjective ? justifier votre réponse.

3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.

Exercice n°6

On considère la relation $\mathfrak{R}$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice n°7

1. Pour chacune des relations définies ci-dessous, dire si elle est <u>réflexive</u>, <u>symétrique</u>, <u>antisymétrique</u>, <u>transitive</u>.

a. $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = -y$

b. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x < y$

c. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x \leq y$

2. Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

<u>Exercices Supplémentaires</u>

(Ces exercices ne seront pas corrigés en TD mais il est fortement recommandé de les faire)

Exercice n°8

1. On considère la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x\, e^y = y\, e^x$.

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

2. On considère la relation $\mathfrak{R}$ sur $\mathbb{R}$, définie par : $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow cos^2\, x + sin^2\, y = 1$.

La relation $\mathfrak{R}$ est-elle une relation d'équivalence ? Justifier votre réponse.

Exercice n°9

Démonter que la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{e^x+2}{e^{-x}}$ est bijective.

Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice n°10

Pour chacune des applications ci-dessous, dire si elle est injective, surjective, bijective. Justifier votre réponse.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2 \qquad h: [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \mapsto x^2$$

$$e: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^3 \qquad k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x^3 \qquad p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^4$$