Série de TD n°1

Exercice 1 :

1. Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$(a)\ F = m\frac{v}{R}$$

Où F est une force, v est une vitesse et R une longueur.

$$(b)\ P = \rho g h_1 + h_2.F$$

Où P est une pression, g est l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs, F est une force et ρ la densité volumique.

2. Etablir l'équation aux dimensions de la constante de gravitation G, sachant que la force gravitationnelle appliquée entre deux planètes est donnée par $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$, F la force, m_1 et m_2 la masse la planète 1 et 2 et d la distance entre les deux planètes. Quelle est son nuitée en SI.

Exercice 2 :

La période T d'un satellite terrestre ayant un mouvement circulaire autour de la terre peut dépendre, a priori, de la masse M_T de la Terre, du rayon R du cercle décrit et de la constante de la gravitation universelle G. On peut faire l'hypothèse que la période T a pour expression : $T = KM_T^a R^b G^c$ T où K est une constante sans dimension. Déterminer, par une analyse dimensionnelle, les valeurs de a, b et$c$. En déduire l'expression de la formule de la période T.

Exercice 3 :

On considère, dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\ ;\ \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k}\ ;\ \vec{V}_3 = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = 3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3$ et $\vec{w} = \left\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right\|^2$.

3- Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V}_1$. Montrer qu'elles représentent les cosinus des angles (α, β, γ) que fait le vecteur $\vec{V}_1$ avec les axes Ox, Oy et Oz.

4- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1.\vec{V}_2$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

5- Calculer le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

6- Trouver la composante de la projection de $\vec{V}_3$ suivant la direction de $\vec{V}_1$.

7- Calculer le produit mixte $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$ et le double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$.

8- Vérifier que $\vec{V}_1 \wedge \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle t suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} - \sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où α et ω sont des constantes réelles positives. Calculer :

1. Leurs dérivées première et seconde par rapport à t ainsi que leurs modules.
2. L'intégrale $\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt$, sachant que pour $t = 0$, on a $\vec{u}_1(t=0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

<u>Exercice 5 :</u>

- Calculer le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x,y,z) = 2x^2yz + xyz$$

Evaluer $\overrightarrow{grad}U$ au point $M(1,-1,2)$.

- Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\vec{\imath} + (y^3z - 2yx)\vec{\jmath} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

- Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{W}(x,y,z) = (2xy)\vec{\imath} + (xy^2+1)\vec{\jmath} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

Corrigé

Exercice 1 :

1- Homogénéité des formules :

Formule (a) :

$$F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = \mathrm{MLT}^{-2} \dots (1)$$

$$F = \frac{mv}{R} \Rightarrow [F] = \frac{[m][v]}{[R]} = \frac{MLT^{-1}}{L} = MT^{-1} \dots (2)$$

Cette loi n'est pas homogène puisque $(1) \neq (2)$.

Rectification :

$$\mathrm{MLT}^{-2} = (M\mathrm{T}^{-1}).\left(\frac{L}{T}\right)$$

Donc, on peut écrire :

$$F = \frac{mv}{R}v'$$

Où v' a la dimension d'une vitesse.

Formule (b) :

$$P = \rho g h_1 + h_2.F \Rightarrow [P] = [\rho][g][h_1] = [h_2][F]$$

$$P = \frac{F}{s} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[s]} = \frac{\mathrm{MLT}^{-2}}{\mathrm{L}^2} = \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2} \dots .(1)$$

$$[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{M}{L^3} = ML^{-3} \ ; \ [g] = [a] = LT^{-2} \ ; \ [h_1] = L \Rightarrow [\rho][g][h_1] = ML^{-1}T^{-2} \dots (2)$$

$$[h_2][F] = LMLT^{-2} = ML^2T^{-2}$$

Cette équation n'est pas homogène : $(1) = (2) \neq (3)$

Pour rectifier cette formule, il faut multiplier le deuxième terme de la somme avec paramètre de dimension L^{-3}(inverse d'un volume). Par exemple :

$$P = \rho g h_1 + \frac{h_2.F}{V}$$

2- Les dimensions eu unités de la constante de gravitation :

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \Rightarrow G = \frac{F\ d^2}{m_1 m_2} \to [G] = \frac{[F][d]^2}{[m_1][m_2]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{MM} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Son unité SI est : $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

Exercice 2 :

On a :

$$T \ = \ K\ m^a R^b G^c \Rightarrow [T] = \ [k].[m]^a[R]^b[G]^c$$

Sachant que :

$$[T] = T, [k] = 1, [m] = M, [R] = L \; et \; [G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Il s'en suit que :

$$T = M^{a-c}L^{b+3c}T^{-2c}$$

Par identification, on obtient le système d'équations linéaires suivant !

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + 3c = 0 \\ -2c = 1 \end{cases}$$

Sa résolution, donne les valeurs des paramètres a, b et c :

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = -1/2 \end{cases}$$

Donc, on peut écrire l'équation :

$$T = k\frac{R^{3/2}}{(mg)^{\frac{1}{2}}} = K\sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \quad (K = 2\pi)$$

<u>Exercice 03 :</u>

1- Les modules :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$
$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

2- Les composantes :

$$3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 - 4\vec{V}_3 = 8\vec{\imath} + 17\vec{\jmath} - 26\vec{k}$$

$$\|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\|^2 = (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}).(-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}) = (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 6$$

3- Vecteur unitaire :

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

Les cosinus directeurs :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1\vec{\imath}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{\imath}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} = u_{Ax} \; ; \; \cos\beta = \frac{\vec{V}_1\vec{\jmath}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{\jmath}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = u_{Ay}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{V}_1\vec{k}}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{k}\|} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = u_{Az}$$

4- Le produit scalaire : $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 14$

L'angle entre les deux vecteurs :

$$cos\alpha = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|} = \frac{14}{15} \rightarrow \alpha = 21.04° = 0.367rad$$

5- Le produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

La surface du parallélogramme :

S $=\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{16^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29}$

6- La composante de la projection :

$$\vec{V}_3.\vec{u}_A = (\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}).\left(\frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = 1/3$$

7- Produit mixte :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3 = (4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}).(\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}) = 3$$

Double produit vectoriel :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 21\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - 22\vec{k}$$

8- Vérification de la relation : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3$

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -20\vec{\imath} - 13\vec{\jmath} - 15\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -20 & -13 & -15 \end{vmatrix} = -11\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 46\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 = \left(2.1 + ((-1).(-5)) + ((-2).3)\right).\vec{V}_2 = \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3 = 14.\vec{V}_3 = 14\vec{\imath} - 70\vec{\jmath} + 42\vec{k}$$

$$(\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3 = \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 4\vec{k} - (14\vec{\imath} - 70\vec{\jmath} + 42\vec{k}) = -11\vec{\imath} + 70\vec{\jmath} - 46\vec{k}$$

Alors :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2).\vec{V}_3$$

<u>Exercice 4 :</u>

Les première et seconde dérivées et leurs modules :

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = (6t)\vec{\imath} - (4t)\vec{\jmath} + \vec{k}\ \ ; \ \ \left\|\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\right\| = \sqrt{52t^2+1}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = 6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}\ \ ; \ \ \left\|\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{52}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\,\vec{\imath} - \omega\cos(\omega t)\,\vec{\jmath} - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k}\ \ ; \ \ \left\|\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right\| = \sqrt{\omega^2+\alpha^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + \omega^2\sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k}\ ; \ \ \left\|\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{\omega^4+\alpha^4 e^{-2\alpha t}}$$

L'intégrale :

$$\vec{u}_1(t) = \int \vec{r}_1(t)dt = \int \left[(3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}\right]dt$$

$$= \left(\int (3t^2)dt\right)\vec{\imath} - \left(\int (2t^2)dt\right)\vec{\jmath} + \left(\int (t+1)dt\right)\vec{k}$$

$$= (t^3)\vec{\imath} - \left(\frac{2}{3}t^3\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\vec{k} + \vec{C}_1$$

Condition initiale :

$$t=0\ \Rightarrow \vec{u}_1(t=0) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = \vec{C}_1$$

On a finalement :

$$\int \vec{r}_1(t)dt = (t^3+1)\vec{\imath} - \left(\frac{2}{3}t^3+1\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{2}t^2+t+1\right)\vec{k}$$

<u>Exercice 5 :</u>

La gradient :

$$\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (4xyz+yz)\vec{\imath} + (2x^2z+xz)\vec{\jmath} + (2x^2y+xy)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U(M) = \overrightarrow{grad}U(1,-1,2) = -10\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

La divergence :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x + y + z)$$

Le rotationnel :

$$\overrightarrow{rotW} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial W_z}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} - 3z^2\vec{j} + (y^2 - 2x)\vec{k}$$