Cours de Statistiques et Probabilités

$2^{ème}$ Année Licence Mathématiques Appliquées

Dr. Yasmina ZIANE

Département de Recherche Opérationnelle
Faculté des Sciences Exactes
Université de Béjaia

2019 - 2020

Avant-propos

Ce document est un support de cours pour les enseignements de la statistique et des probabilités. Il correspond essentiellement aux enseignements assurés aux étudiants de L2 Mathématiques appliquées. Cependant, il peut être utilisé pour l'enseignement d'autres filières et d'autres niveaux.

Ce cours couvre les outils élémentaires de la statistique descriptive et de la théorie des probabilités. La première partie est constituée de trois chapitres, qui englobent le traitement et l'interprétation des données et des informations recueillies, ainsi que la représentation sous forme de graphiques, de tableaux et d'indicateurs statistiques de ces dernières. La deuxième partie est formée de quatre chapitres consacrés, respectivement, à l'analyse combinatoire, aux notions de probabilités, aux variables aléatoires discrètes et continues, ainsi qu'aux convergence de suites de variables aléatoires.

Chaque chapitre se conclut par des exercices permettant de contrôler l'acquisition des notions essentielles qui y ont été introduites.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures

CHAPITRE 1

Introduction, définitions, terminologie et caractère qualitatif

Sommaire

1.1 Introduction

La statistique est une science qui consiste à étudier la collecte de données, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous. Il ne faut pas confondre la statistique qui est la science qui vient d'être définie et une statistique qui est un ensemble de données chiffrées sur un sujet précis.
La statistique descriptive est une méthode de description de données recueillies à partir de l'étude de certains phénomènes d'ordre économique, sociologique, ou expérimental, etc. Les premières statistiques correctement élaborées ont été celles des recensements démographiques. Ainsi le vocabulaire statistique est essentiellement celui de la démographie.
Les ensembles étudiés sont appelés **population**. Les éléments de la population sont appelés **individus** ou **unités statistiques**. La population est étudiée selon un ou plusieurs **caractères**.

1.2 Notions fondamentales

1.2.1 Population

On désigne sous le nom de population, un ensemble de personnes ou d'objets sur lequel on fera une étude statistique. Cet ensemble est noté par Ω.

Exemple 1.1 *On considère l'ensemble des étudiants de la section A. On s'intéresse au nombre de frères et soeurs de chaque étudiant. Dans ce cas*

$$\Omega = ensemble\ des\ \text{é}tudiants.$$

1.2.2 Échantillon

C'est un sous-ensemble construit et représentatif d'une population donnée.

1.2.3 Individu (Unité statistique)

On appelle individu tout élément de la population Ω, il est noté ω, (ω dans Ω).

Remarque 1.1 *L'ensemble Ω peut être un ensemble de personnes, d'objets ou d'animaux, etc.*
L'unité statistique est un objet pour lequel nous cherchons à recueillir de l'information.

Exemple 1.2 *Dans l'exemple indiqué ci-dessus, un individu est tout étudiant de la section.*

1.2.4 Caractère (variable statistique)

On appelle caractère (ou variable statistique, dénotée V.S) toute application

$$X : \Omega \to C$$

L'ensemble C est dit : ensemble des valeurs du caractère X (c'est ce qui est mesuré ou observé sur les individus)

Exemple 1.3 *la couleur, le sexe, le poids, la taille, la marque, le modèle, le prix, la surface, etc.*

1.2.5 Modalités (valeurs) d'un caractère

Les modalités d'un caractère ou d'une variable statistique sont les différentes valeurs que peut prendre celle-ci.

Exemple 1.4
- *Le caractère sexe présente deux modalités : Masculin, Féminin.*
- *Le caractère nombre d'enfants dans un ménage présente plusieurs modalités : 0,1,2,...*

1.3 Tableau statistique d'une variable statistique

1.3.1 Effectif

Lorsque la population de taille N est répartie sur les différentes modalités, nous obtenons pour chacune d'elle un nombre : c'est le nombre d'individus ayant cette modalité, on l'appelle **effectif**. On note généralement l'effectif correspondant à la modalité m_i, par n_i $i = \overline{1,k}$ tel que $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

1.3.2 Série statistique

Les couples $(m_i$,$n_i)$, $i = \overline{1,k}$, constitués de la modalité m_i et de l'effectif correspondant forment une suite qu'on appelle **série statistique**.

1.3.3 Distribution statistique

Soit une population concernant N individus. Le classement des individus de cette population selon les différentes modalités du caractère donne naissance à **une distribution statistique** généralement présentée dans **un tableau statistique**.

1.3.4 Fréquences relatives

La fréquence relative qui correspond à la modalité m_i et qu'on note f_i représente la proportion d'individus de la population ayant la modalité m_i. Elle est donnée par :

$$f_i = \frac{n_i}{N}, \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Remarque 1.2

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} f_i &= f_1 + f_2 + \ldots + f_k; \\
&= \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_k}{N}; \\
&= \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{N} = 1.
\end{aligned}$$

1.3.5 Tableau statistique

Un tableau statistique est un tableau à deux colonnes. La première colonne de gauche est toujours réservée aux modalités du caractère à étudier, tandis que celle de droite est utilisée pour indiquer les effectifs ou les fréquences relatives correspondants aux différentes modalités.

Modalités	Effectifs	Fréquences relatives
m_1	n_1	f_1
m_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m_k	n_k	f_k
Total	$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

Exemple 1.5 *On s'interesse aux types d'activités principales de 40 entreprises. Il y a 5 types possibles (catégories) : I (Industrie), T (Transport), C (Communications), S (Services), A (Autres). Les données sont résumées dans le tableau suivant :*

activité principale	*Nombre d'entreprise*
Industrie	*15*
Transport	*10*
Communications	*8*
Services	*3*
Autres	*4*
Total	*40*

1. *La population : entreprises, de taille : 40*
2. *Le caractère : Les activités principales (Catégories)*
3. *Les modalités : I (Industrie), T (Transport), C (Communications), S (Services) et A (Autres).*
4. *Tableau statistique :*

Modalités	n_i	f_i
Industrie	*15*	*15/40*
Transport	*10*	*10/40*
Comunications	*8*	*8/40*
Services	*3*	*3/40*
Autres	*4*	*4/40*
Total	*40*	*1*

1.4 Types des caractères

Nous distinguons deux catégories de caractères : les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.

1.4.1 Caractère qualitatif (variable statistique qualitative)

Un caractère est dit de nature qualitatif si ses modalités ne sont pas mesurables ou si elles sont désignées par des noms.

Exemple 1.6 *Le sexe (masculin, féminin), la profession (enseignement, architecure,. . .), l'état matrimonial (marié, divorcé, célibataire).*

Les modalités d'un caractère qualitatif peuvent être classées sur deux types d'échelles : **nominal** ou **ordinal**.

a Caractère qualitatif nominal : un caractère qualitatif est dit nominal, lorsque ses modalités ne peuvent pas être classées de façon naturelle.

Exemple 1.7 *La couleur des Yeux (noire, bleue, verte), le Sexe (Masculin, Féminin).*

b Caractère qualitatif ordinal : un caractère qualitatif est dit ordinal, lorsque ses modalités peuvent être classées dans un certain ordre naturel.

Exemple 1.8 *La mention au Bac (excellent, très bien, bien, assez bien, passable).*

1.4.2 Caractère quantitatif (variable statistique quantitative)

Une variable statistique est dite de nature quantitative si ses modalités sont mesurables. Les différentes modalités d'une variable statistique quantitative constituent l'ensemble des valeurs numériques que peut prendre la variable statistique.

a Caractère quantitatif discret : Une variable statistique est discrète lorsque ses modalités sont des valeurs numériques isolées (nombres entiers).

Exemple 1.9 *Nombre d'enfants dans une famille, nombre de pièces défectueuses dans un lot.*

b Caractère quantitatif continu : Une variable statistique est dite continue lorsque ses valeurs possibles sont dans un intervalle de $\mathbb{R}$. Le nombre de ces valeurs est toujours infini. D'une façon générale toutes les grandeurs liées à l'espace (longueur, surface), au temps, à l'âge, à la durée de vie, à la masse, au poids ou encore aux combinaisons de ces éléments (vitesse, débit, densité) sont des variables continues.

Exemple 1.10 *Poids, taille, diamètre d'une pièce.*

1.5 Représentations graphiques d'une série statistique qualitative

A partir de l'observation d'un caractère qualitatif (nominal et ordinal), deux diagrammes permettent de représenter cette variable : **le diagramme en bandes** (dit **tuyaux d'orgue**) et le **Diagramme par secteur (diagramme circulaire)**.

1.5.1 Tuyaux d'orgue

Nous portons en abscisses les modalités, de façon arbitraire. Nous portons en ordonnées des rectangles dont la longueur est proportionnelle aux effectifs, ou aux fréquences, de chaque modalité, (voir figure 1.1).

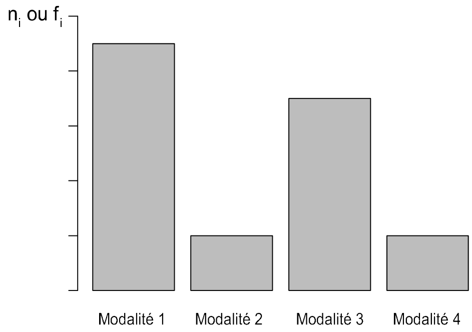


FIGURE 1.1: *Tuyaux d'orgue.*

1.5.2 Diagramme par secteur (diagramme circulaire)

Les diagrammes circulaires consistent à partager un disque en tranches, ou secteurs, correspondant aux modalités observées et dont la surface est proportionnelle à l'effectif, ou à la fréquence, de la modalité (voir Figure 1.2).

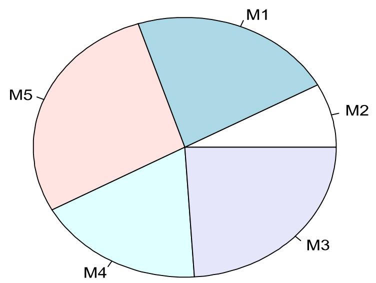


FIGURE 1.2: *Diagramme circulaire.*

Le degré d'un secteur est déterminé à l'aide de la règle de trois de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} N & \longrightarrow & 360^\circ \\ n_i & \longrightarrow & d_i, \ (\textit{degré de la modalité } i) \end{array}$$

Donc,

$$d_i = \frac{n_i \times 360}{N}.$$

Exercice 1.1 *La série statistique suivante donne la répartition de 65 étudiants selon leur niveau d'étude (année de scolarisation).*

L3, M1,L3,L1,M2,L3,L1,L3,L2,M1,M2,M1,L3,L2,L2,L1,M2,L1,L3,L2,L2,M1,M1,M2, L3,M2,L1,L1,L2,M1,L1,L2,L1,M2,L1,L1,M1,L3,L3,L3,M1,L2,L1,M2,L2,M1,L2,M1, L3,M2,L2,M1,L1,M2,L3,M1,L2,L2,M2,L3,L2,M1,L3,M2,L2.

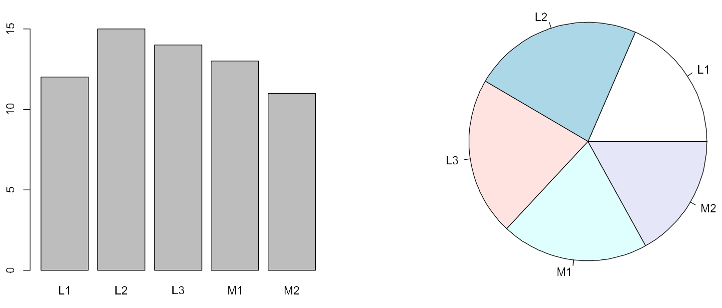
1. *Déterminer la population étudiée et sa taille.*
2. *Quel est le caractère étudié, sa nature et ses modalités.*
3. *Donner le tableau statistique.*
4. *Représenter graphiquement cette distribution.*

Solution :

1. *La population : les étudiants, sa taille : 65.*
2. *Le caractère : niveau d'étude, sa nature : qualitatif ordinal, ses modalités : L1,L2,L3,M1,M2.*
3. *Tabeau statistique :*

Modalités	n_i	f_i
L1	*12*	*12/65*
L2	*15*	*15/65*
L3	*14*	*14/65*
M1	*13*	*13/65*
M2	*11*	*11/65*
Total	*65*	*1*

4. *Resprésentation graphique :*



(a) (b)

FIGURE 1.3: *Tuyaux d'orgue (a) et diagramme circulaire (b) des niveaux d'étude de 65 étudiants*

1.6 Exercices

Exercice 1.2 *Parmi les caractères ci-dessous, quels sont les caractères qualitatifs (nominaux, ordinaux) et quels sont les caractères quantitatifs (discrets, continus) ? Citer quelques modalités susciptibles d'êtres prises par chaque caractère :*
Revenu annuel, nombre de maisons vendues par ville, catégorie socio-professionnelle d'un employé, la langue parlée par chaque pays, les groupes sanguins, la superficie d'une entreprise, la taille d'une personne, le poids d'une personne, la moyenne des étudiants, citoyenneté, la couleur des yeux, la mention, état matrimonial.

Exercice 1.3 *Proposer des exemples de variables quantitatives transformées en variables qualitatives. Préciser les modalités de cette dernière.*

Exercice 1.4

1. *Citer trois caractères qualitatifs nominaux.*
2. *Citer trois caractères qualitatifs ordinaux.*
3. *Citer trois caractères quantitatifs discrets.*
4. *Citer trois caractères quantitatifs continus.*

Exercice 1.5 *Déterminer la population et sa taille, le caractère, sa nature et ses modalités dans chaque étude statistique suivante :*

- *Cinquante éprouvettes d'acier spécial sont soumises à des essais de résistance. Pour chacune on note le nombre de chocs nécessaires pour obtenir la rupture.*
- *Une entreprise s'intéresse à l'achalandage (nombre de visiteurs) quotidien de son site web pendant le mois de janvier.*
- *On s'intéresse au nombre de pièces défectueuses produites par 20 machines d'une usine au cours d'une journée.*
- *Une grande entreprise utilise 5 usines de fabrication de tailles différentes. Les parts du chiffre d'affaires (CA) pour chacune d'entre elles sont : 30%, 30%, 20%, 15% et 5%.*

Exercice 1.6 *Le tableau suivant donne la répartition selon le groupe sanguin de 40 individus pris au hasard dans une population,*

Groupes sanguins	A	B	AB	O
Nombre de personnes	20	10	x	5

1. *Déterminer la population étudiée et sa taille.*
2. *Quel est le caractère étudié et sa nature ?*
3. *Déterminer l'effectif des personnes ayant un groupe sanguin* AB.

4. *Représenter graphiquement cette distribution.*

Exercice 1.7 *A la question,"Les statistiques permettent de mentir avec assurance : Quelle est votre opinion ?", 80 personnes interrogées ont ainsi répondu :*

Pas du tout d'accord	*10*
Plutôt d'accord	*15*
Indiférent	*12*
Plutôt en accord	*18*
Tout à fait d'accord	*25*

1. *Quelle est la population étudiée et sa taille ?*
2. *Quel est le caractère étudié et donner sa nature ?*
3. *Quelles sont les modalités du caractère ?*
4. *Donner le tableau statistique.*
5. *Représenter graphiquement cette distribution .*

CHAPITRE 2

Variable statistique discrète

Sommaire

2.1 Introduction

Le caractère statistique peut prendre un nombre fini de valeurs (nombre d'enfants, nombre de pièces, ...). Dans ce cas, le caractère statistique étudié est alors appelé un caractère discret.

Exemple 2.1 *Un quartier est composé de* 50 *ménages et la variable* X *représente le nombre de personnes par ménage. Les valeurs de la variable sont :*

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4	5
5	5	5	5	5	6	6	6	8	8

Nous avons

- *Population* (Ω) *ensemble des ménages*
- *Individu* (ω) *un ménage*

- *Caractère (Variable statistique) X nombre de personnes par ménage :*

$$X : \omega \longrightarrow X(\omega).$$

On lit, au ménage ω, on associe $X(\omega) = nombre\ de\ personnes\ dans\ ce\ ménage$

2.2 Tableau statistique

Soit X une variable statistique discrète qui prend les valeurs (modalités) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ et supposant qu'il existe n_i individus ayant la valeur x_i. Le tableau statistique correspondant à une variable statistique discrète est présenté sous la forme suivante :

Modalités x_i	Effectifs n_i	Fréquences relatives f_i
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k
Total	$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

où $f_i = \frac{n_i}{N}$ représente la proportion d'individus ayant la valeur x_i ; $i = \overline{1, k}$.

2.3 Représentation graphique des effectifs et fréquences relatives

Les effectifs n_i (resp. les fréquences ralatives f_i) pour une variable statistique discrète sont représentés par un **diagramme en bâtons**.

- Sur l'axe des abscisses, on positionne les différentes valeurs de la variable statistique X ;
- Sur l'axe des ordonnées on représente les effectifs n_i ou les fréquences relatives f_i ;
- Pour chaque valeur x_i, on trace un trait (bâton) perpendiculaire à l'axe des abscisses dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif n_i ou aux fréquences relatives f_i. Voir la figure (2.1).
- En reliant les sommets des bâtons on obtient un polygône des effectifs (ou des fréquences).

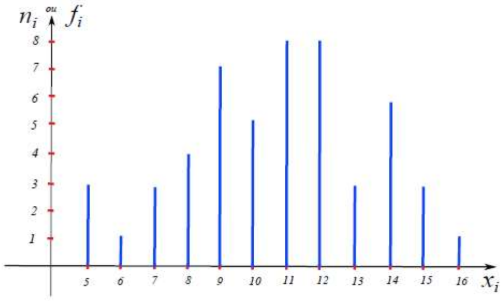


FIGURE 2.1: *Diagramme en bâtons.*

2.3.1 Polygône des fréquences

Il permet de représenter sous forme de courbe, la distribution des fréquences. Il est obtenu en joignant, par des segments de droite, les sommets de chaque batôn du graphe.

Exemple 2.2 *Dans l'exemple précédent, le tableau statistique est le suivant :*

x_i	n_i	f_i
1	5	$5/50$
2	9	$9/50$
3	15	$15/50$
4	10	$10/50$
5	6	$6/50$
6	3	$3/50$
8	2	$2/50$
Total	50	1

La représentation graphique de cette série de données est illustrée par le diagramme en bâtons de la figure suivante :

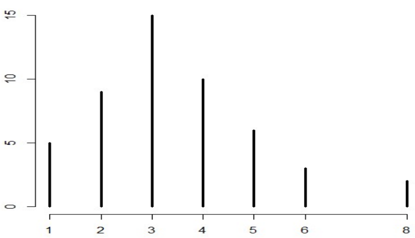


FIGURE 2.2: *Diagramme en bâtons qui représente le nombre de personnes par ménage.*

2.4 Effectifs cumulés et fréquences cumulées

2.4.1 Effectifs cumulés croissants et fréquences cumulées croissantes

L'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) correspondant à la valeur x_i $(i = \overline{1,k})$ est le nombre d'individus (resp. proportion d'individus) ayant une valeur de la variable X inférieure ou égale à x_i $(i = \overline{1,k})$ ou bien strictement inférieure à x_{i+1} $(i = \overline{1,k})$. On note N_i^+ (resp. F_i^+).
On a, effectifs cumulés croissants :

$$\begin{aligned}
N_1^+ &= n_1; \\
N_2^+ &= n_1 + n_2 = N_1^+ + n_2; \\
&\vdots \\
N_i^+ &= n_1 + n_2 + \ldots + n_i = N_{i-1}^+ + n_i; \\
&\vdots \\
N_k^+ &= n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N_{k-1}^+ + n_k = N.
\end{aligned}$$

Les fréquences cumulées croissantes :

$$\begin{aligned}
F_1^+ &= f_1; \\
F_2^+ &= f_1 + f_2 = F_1^+ + f_2; \\
&\vdots \\
F_i^+ &= f_1 + f_2 + \ldots + f_i = F_{i-1}^+ + f_i; \\
&\vdots \\
F_k^+ &= f_1 + f_2 + \ldots + f_k = F_{k-1}^+ + f_k = 1.
\end{aligned}$$

2.4.2 Effectifs cumulés décroissants et fréquences cumulées décroissantes

L'effectif cumulé décroissant (resp. fréquence cumulée décroissante) correspondant à la valeur x_i $(i = \overline{1,k})$ est le nombre d'individus (resp. proportion d'individus) ayant une valeur de la variable X supérieure ou égale à x_i $(i = \overline{1,k})$ ou bien strictement supérieure à x_{i+1} $(i = \overline{1,k})$. On note N_i^- (resp. F_i^-).

On a, effectifs cumulés décroissants :

$$\begin{aligned}
N_1^- &= N; \\
N_2^- &= n_2 + n_3 + \ldots + n_k = N_1^- - n_1; \\
&\vdots \\
N_i^- &= n_i + n_{i+1} + \ldots + n_k = N_{i-1}^- - n_{i-1}; \\
&\vdots \\
N_k^- &= n_k = N_{k-1}^- - n_{k-1}.
\end{aligned}$$

Les fréquences cumulées décroissantes :

$$\begin{aligned}
F_1^- &= 1; \\
F_2^- &= f_2 + f_3 + \ldots + f_k = F_1^- - f_1; \\
&\vdots \\
F_i^- &= f_i + f_{i+1} + \ldots + f_k = F_{i-1}^- - f_{i-1}; \\
&\vdots \\
F_k^- &= f_k = F_{k-1}^- - f_{k-1}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 *Pour vérifier l'exactitude des calculs, on peut utiliser les inégalités suivantes :* $N_k^+ = N$, $N_k^- = n_k$, $F_k^+ = 1$, $F_k^- = f_k$.

Remarque 2.2 $F_i^+ = \frac{N_i^+}{N}$ *et* $F_i^- = \frac{N_i^-}{N}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Exemple 2.3 *Nous calculons les effectifs cumulés* $\Big($*croissants* (N_i^+) *et décroissants* $(N_i^-)\Big)$ *et les fréquences cumulées* $\Big($*croissantes* (F_i^+) *et décroissantes* $(F_i^-)\Big)$ *pour la série statistique de l'exemple précédent :*

x_i	n_i	f_i	N_i^+	N_i^-	F_i^+	F_i^-
1	5	0.1	5	50	0.1	1
2	9	0.18	14	45	0.28	0.9
3	15	0.3	29	36	0.58	0.72
4	10	0.2	39	21	0.78	0.42
5	6	0.12	45	11	0.9	0.22
6	3	0.06	48	5	0.96	0.1
8	2	0.04	50	2	1	0.04
Total	50	1				

2.4.3 Représentation graphique des effectifs (resp. fréquences) croissants et décroissants (resp. croissantes et décroissantes)

Les N_i^+ et les F_i^+ sont représentés par la courbe en escalier cumulative croissante tandis que les N_i^- et les F_i^- sont représentés par la courbe en escalier cumulative décroissante.
Afin de mieux comprendre comment représenter les effectifs cumulés et les fréquences cumulées, nous allons représenter les N_i^+ et les N_i^- pour l'exemple 2.1.

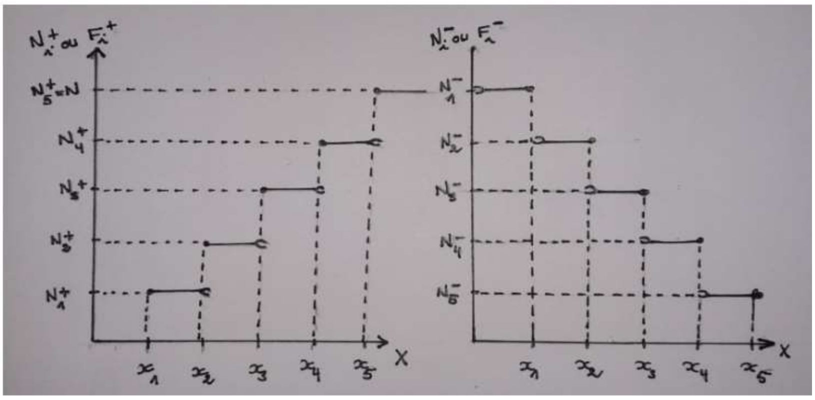


FIGURE 2.3: *Courbe cumulative des fréquences cumulées croissnates et décroissantes qui représente le nombre de personnes par ménage.*

2.5 Fonction de répartition

Soit la fonction $F_X : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ définie par :
$F_X(x) :=$ pourcentage des individus dont la valeur du caractère est $\leq x$.
Cette fonction s'appelle la fonction de répatition du caractère X.

Proposition 2.1 *La fonction de répartiton est définie par*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{N} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1\,; \\ F_1, & x_1 \leq x < x_2\,; \\ \vdots & \\ F_i, & x_i \leq x < x_{i+1}\,; \\ \vdots & \\ 1, & x \geq x_k. \end{cases}$$

Exemple 2.4 *La fonction de répartition de la série statistique donnée dans l'exemple 2.1 est la suivante :*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{N} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) \end{aligned}$$

$F_X(x_1) = f_1 = 0.1$
$F_X(x_2) = f_1 + f_2 = 0.1 + 0.18 = 0.28$
$F_X(x_3) = f_1 + f_2 + f_3 = 0.1 + 0.18 + 0.3 = 0.58$
$F_X(x_4) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0.1 + 0.18 + 0.3 + 0.2 = 0.78$
$F_X(x_5) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 0.1 + 0.18 + 0.3 + 0.2 + 0.12 = 0.9$
$F_X(x_6) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0.1 + 0.18 + 0.3 + 0.2 + 0.12 + 0.06 = 0.96$
$F_X(x_7) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 0.1 + 0.18 + 0.3 + 0.2 + 0.12 + 0.06 + 0.04 = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1\,; \\ 0.1, & 1 \leq x < 2\,; \\ 0.28, & 2 \leq x < 3\,; \\ 0.58, & 3 \leq x < 4\,; \\ 0.78, & 4 \leq x < 5\,; \\ 0.9, & 5 \leq x < 6\,; \\ 0.96, & 6 \leq x < 8\,; \\ 1, & x \geq 8. \end{cases}$$

2.6 Paramètres de position (caractéristiques de tendance centrale)

Ces paramètres permettent de situer l'ensemble des effectifs de la population par rapport au caractère étudié. Ce sont des quantités qui visent à résumer le mieux possible la nature de la distribution.
Les paramètres de tendance centrale utilisés de façon courante sont : Mode, Médiane, Moyenne et les quartiles.

2.6.1 Mode

Le mode d'une variable statistique discrète est la valeur qui a le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence), il est noté par M_o.

Exemple 2.5 *Dans l'exemple du nombre de personnes par ménage (exemple 2.1), le mode est $M_o = 3$ personnes, car l'effectif maximum $n_{\max} = 15$ ménages (fréquence maximal $f_{\max} = 0.3$).*

Remarque 2.3 *Graphiquement (diagramme en bâtons) le mode correpond à l'abscisse du plus haut bâton.*

2.6.2 Médiane

La médiane représente la valeur de la variable statistique qui partage la population en deux sous-ensembles d'individus d'effectifs égaux, elle est notée par Me. Le calcul de la médiane se fait par deux méthodes différentes :

1. **Méthode 1** :
   (a) On ordonne par ordre croissant les valeurs de la série $(x_i)_{i=\overline{1:n}}$; on obtient une nouvelle série ordonée qu'on note $(y_i)_{i=\overline{1:n}}$, avec $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$;
   (b) On distingue deux cas :
      (i) n est impair ($n = 2p+1$). Alors
      $$Me = y_{p+1} = y_{\frac{n+1}{2}}.$$
      (ii) n est pair ($n = 2p$). Alors
      $$Me = \frac{y_p + y_{p+1}}{2} = \frac{y_{\frac{n}{2}} + y_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}.$$
2. **Méthode 2** :
   Dans ce cas la détermination de la médiane se fait par trois étapes :
   (a) On calcule les N_i^+ ou les F_i^+ ;
   (b) On identifie le plus petit N_i^+ supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ (notons ce N_i^+ par N^{+*}) ou la plus petite F_i^+ supérieure ou égale à 0.5 (notons ce F_i^+ par F^{+*})
   (c) La médiane Me est alors la valeur de la variable statistique qui correspond à N^{+*} ou F^{+*}.

Remarque 2.4 $F(Me) = 0.5$.

Exemple 2.6 *Calculons la médiane pour l'exemple 2.1.*

1. ***Méthode 1 :***

(i) *Ordonner la série :* $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 8$.

(ii) $n = 50$ *un nombre pair* $(n = 50 = 2 \times 25)$*, donc* $Me = \frac{y_{25}+y_{25+1}}{2} = \frac{y_{\frac{50}{2}}+y_{\frac{50}{2}+1}}{2}$

(iii) $Me = \frac{3+3}{2} = 3$.

2. ***Méthode 2 :***

(i) *le plus petit* N_i^+ *supérieur ou égale à* $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$ *est* $N^{+*} = 29$ *donc la médiane est* $Me = x_3 = 3$

(ii) *la plus petite* F_i^+ *supérieure ou égale à* 0.5 *est* $F^{+*} = 0.58$*, donc la médiane est* $Me = x_3 = 3$

2.6.3 Moyenne

Considérons la série statistique (x_i, n_i), $i = \overline{1:k}$ avec $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$. La moyenne arithmétique notée par $\overline{X}$ est donnée par la formule suivante :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i. \tag{2.1}$$

Exemple 2.7 *La moyenne arithmétique de la série statistique de l'exemple 2.1 qui correspond au nombre moyen de personnes de chaque ménage est :*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = \frac{1}{50}(1 \times 5 + 2 \times 9 + 3 \times 15 + 4 \times 10 + 5 \times 6 + 6 \times 3 + 8 \times 2);\\ &= \sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.18 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.12 + 6 \times 0.06 + 8 \times 0.04;\\ &= 3.44.\end{aligned}$$

2.6.4 Quartiles

Il existe trois quartiles :

1. **Le premier quartile** Q_1 **:** représente le plus petit N_i^+ supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$ (notons ce N_i^+ par N^{+*}) ou la plus petite F_i^+ supérieure ou égale à 0.25 (notons ce F_i^+ par F^{+*}). Le Q_1 est alors la valeur de la variable statistique qui correspond à N^{+*} ou F^{+*}.

2. **Le deuxième quartile** Q_2 **:** le Q_2 est égal à la médiane.

3. **Le troisième quartile** Q_3 **:** représente le plus petit N_i^+ supérieur ou égal à $\frac{3n}{4}$ (notons ce N_i^+ par N^{+*}) ou la plus petite F_i^+ supérieure ou égale à 0.75 (notons ce F_i^+ par F^{+*}). Le Q_3 est alors la valeur de la variable statistique qui correspond à N^{+*} ou F^{+*}.

Remarque 2.5 $F(Q_1) = 0.25$, $F(Q_3) = 0.75$.

Exemple 2.8 *Pour l'exemple 2.1*

- *Le premier quartile* $Q_1 = x_2 = 2$ *car le plus petit* N_i^+ *supérieur ou égal* $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$ *est* $N^{+*} = N_2^+ = 14$ *et la plus petite* F_i^+ *supérieure ou égale à* 0.25 *est* $F^{+*} = F_2^+ = 0.28$.

- *Le deuxième quartile* $Q_2 = Me = 3$.

- *Le troisième quartile* $Q_3 = x_4 = 4$ *car le plus petit* N_i^+ *supérieur ou égal* $\frac{3N}{4} = \frac{150}{4} = 37.5$ *est* $N^{+*} = N_4^+ = 39$ *et la plus petite* F_i^+ *supérieure ou égale à* 0.75 *est* $F^{+*} = F_4^+ = 0.78$.

2.7 Paramètres de dispersion

Les paramètres de dispersion sont calculés dans le but de mesurer la dispersion des différentes valeurs de la variable statistique autour d'une valeur centrale comme la moyenne. Les caractéristiques de dispersion les plus fréquemment utilisées en statistique sont : l'étendue, la variance, l'écart-type, l'intervalle interquartile et l'écart interquartile.

2.7.1 Étendue

L'étendue (notée E) est la différence entre la plus grande ($x_{\max}$) et la plus petite ($x_{\min}$) des valeurs observées.

$$E = x_{\max} - x_{\min};$$

$x_{\max} = \max\{x_i, i = \overline{1:N}\}$ et $x_{\min} = \min\{x_i, i = \overline{1:N}\}$.

2.7.2 Variance

La variance (notée V(X)) est donnée par la formule suivante :

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{X})^2.$$

Pour des calculs simples, on utilise généralement la formule suivante :

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{X}^2.$$

2.7.3 Écart-type

L'écart-type (noté σ_X) est donné par la fomule suivante :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

- Si σ_X est grand, alors les différentes valeurs de la variable statistique X sont fortement dispersées autour de la moyenne.
- Si σ_X est petit, alors les différentes valeurs de la variable statistique X sont faiblement dispersées autour de la moyenne.

2.7.4 Écart interquartile

On appelle Ecart interquartile (noté EIQ), la différence entre le troisième et le premier quartile (Q_3 et Q_1), il est donné par la formule suivante :

$$EIQ = Q_3 - Q_1.$$

2.7.5 Intervelle interquartile

L'intervelle interquartile (noté IQ) est donné par :

$$IQ = [Q_1, Q_3].$$

C'est donc l'intervalle qui contient 50% des observations en laissant 25% à droite et 25% à gauche.

Exemple 2.9 *Les paramètres de dispersion de la série statistique de l'exemple 2.1 sont donnés par :*

- *Étendue :* $E = x_{\max} - x_{\min} = 8 - 1 = 7.$
- *Variance :*

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{50}(5\times 1 + 9\times 2^2 + 15\times 3^2 + 10\times 4^2 + 6\times 5^2 + 3\times 6^2 + 2\times 8^2) - (3.44)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{X}^2 = (0.1\times 1 + 0.18\times 2^2 + 0.3\times 3^2 + 0.2\times 4^2 + 0.12\times 5^2 + 0.06\times 6^2 + 0.04\times 8^2) - (3.44)^2 \\ &= 2.6064. \end{aligned}$$

- *Écart-type :* $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.6064} = 1.61.$
- *Écart interquartile :* $EIQ = Q_3 - Q_1 = 4 - 2 = 2.$
- *Intervalle interquartile :* $IQ = [2, 4].$

2.8 Exercices

Exercice 2.1 *Dans une petite localité, on a relevé le nombre de pièces par appartement :*

Nombre de pièces	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Nombre d'appartements	*48*	*72*	*96*	*64*	*39*	*25*	*3*

1. *Quelle est la population étudiée ? Donner sa taille.*
2. *Déterminer la variable statistique étudiée, sa nature et ses modalités.*
3. *Dresser le tableau statistique.*
4. *Donner la représentation graphique de la série.*

Exercice 2.2 *On observe les arrivées des clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps donné (10 minutes). On répétant 100 fois cette observation, on obtient les résultats suivants :*

Nombre d'arrivées	1	2	3	4	5	6
Nombre d'observations	15	25	26	20	7	7

1. *Représenter graphiquement ces résultats.*
2. *Calculer la moyenne arithmétique, la variance et l'écart-type.*
3. *Calculer le mode, la médiane, les quartiles et donner la signification concrète de chaque valeur.*
4. *Calculer l'intervalle interquartile.*

Exercice 2.3 *Soit la fonction de répartition suivante :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 30; \\ 0.08, & 30 \leq x < 38; \\ 0.12, & 38 \leq x < 42; \\ 0.24, & 42 \leq x < 50; \\ 0.40, & 50 \leq x < 60; \\ 0.52, & 60 \leq x < 64; \\ 0.8, & 64 \leq x < 70; \\ 0.88, & 70 \leq x < 74; \\ 1, & x \geq 74. \end{cases}$$

1. *Quelle est la nature du caractère étudié ?*
2. *Tracer le graphe de F_X.*
3. *Déduire graphiquement les valeurs des quartiles.*
4. *Donner la distribution de la série et sa représentation graphique.*
5. *Tracer le polygône des fréquences et déterminer le mode.*

Exercice 2.4 *On lance 30 fois de suite 5 pièces de monnaie, à chaque fois on compte le nombre de faces obtenu, les résultats obtenus sont donnés par le tableau suivant :*

x_i	n_i	f_i	F_i^+
0			*0.1*
1			*0.3*
2			*0.4*
3			*0.7*
4			*0.9*
5			*1*
Total	*30*	*1*	

1. *Quelle est la nature de la variable ?*
2. *Compléter le tableau et donner la représentation graphique de la série statistique.*
3. *Calculer le mode, le premier, le deuxième et le troisième quartile.*
4. *Calculer la moyenne et l'écart-type.*
5. *Déterminer la fonction de répartition.*
6. *Donner la représentation graphique de F^+*

CHAPITRE 3

Variable statistique continue

Sommaire

Nous rappelons qu'une variable statistique quantitative concerne une grandeur mesurable. Ses valeurs sont des nombres exprimant une quantité et sur lesquelles les opérations arithmétiques (addition, multiplication, etc,...) ont un sens. Nous allons dans ce chapitre se focaliser sur la V.S quantitative continue.
Une variable statistique continue peut prendre une infinité de valeurs possibles. Le domaine de la variable est alors $\mathbb{R}$ ou un intervalle dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3.1 *Soit l'ensemble des nouveaux nés au C.H.U d'une ville pendant les 3 premiers mois de 2019. Nous désignons par X le poids des nouveaux nés. On suppose que : $x_{\min} = 2.701$ et $x_{\max} = 5.001$.*

3.1 Classe de valeurs

On appelle classe de valeurs de la variable statistique X un intervalle de type [a, b[tel que $X \in [a, b[$ si et seulement si $a \leq X(w) < b$, c'est à dire, que les valeurs du caractère sont dans la classe [a, b[.

Lorsque le nombre d'observations est grand, on procède au classement des données. Le classement des données consiste à regrouper les différentes observations sous forme d'intervalles disjoints et cela en utilisant la formule de Sturge suivante $k = 1 + 3.3\log_{10}(n)$. Ces intervalles sont des modalités de la variable statistique continue X. On les appelle **classes** notée C_i. La classe C_i est donnée par :

$$C_i = [e_{i-1}, e_i[, i = 1, \ldots, k.$$

où

- e_{i-1} : borne inférieure,
- e_i : borne supérieure,
- Amplitude de la classe C_i notée a_i est : $a_i = e_i - e_{i-1}$,
- Centre de la classe C_i noté x_i est : $x_i = \frac{e_{i-1}+e_i}{2}$.

3.2 Tableau statistique

Le tableau statistique d'une varibale statistique continue est représenté sous la forme :

Modalités C_i	Effectifs n_i	Fréquences relatives f_i
$[e_0, e_1[$	n_1	f_1
$[e_1, e_2[$	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	f_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[e_{k-1}, e_k[$	n_k	f_k
Total	$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$

où $f_i = \frac{n_i}{N}$ représente la proportion d'individus ayant la valeur de la variable statistique appartenant à la classe C_i ; $i = \overline{1, k}$.

Exemple 3.2 *On mesure la taille en centimètres de* 50 *élèves d'une classe :*

152	*152*	*152*	*153*	*153*	*154*	*154*	*154*	*155*	*155*
156	*156*	*156*	*156*	*156*	*157*	*157*	*157*	*158*	*158*
159	*159*	*160*	*160*	*160*	*160*	*160*	*161*	*161*	*162*
162	*162*	*163*	*164*	*164*	*164*	*164*	*165*	*166*	*167*
168	*168*	*168*	*169*	*169*	*170*	*171*	*171*	*171*	*171*

On a les classes de tailles définies comme suit :

$[151.5, 155.5[$
$[155.5, 159.5[$
$[159.5, 163.5[$
$[163.5, 167.5[$
$[167.5, 171.5[$

Le tableau statistique correspondant à la variable statistique taille des élèves est le suivant :

Classes C_i	n_i	f_i
$[151.5, 155.5[$	10	0.20
$[155.5, 159.5[$	12	0.24
$[159.5, 163.5[$	11	0.22
$[163.5, 167.5[$	7	0.14
$[167.5, 171.5[$	10	0.20
Total	50	1

3.3 Représentation graphique des effectifs et fréquences relatives

Les effectifs n_i (resp. les fréquences relatives f_i) pour une variable statistique discrète sont représentés par un **histogramme**. On distingue deux cas :

- **Amplitudes des classes égales :**
  On positionne les bornes des différentes classes sur l'axe horizontal de l'histogramme, et on positionne les effectifs n_i (resp. les fréquences relatives f_i) sur son axe vertical. Puis on trace pour chaque classe C_i un rectangle dont la largeur est proportionnelle à l'amplitude de la classe et la longueur est proportionnelle à l'effectif n_i (resp. la fréquence f_i).

- **Amplitudes des classes différentes :**
  On positionne les bornes des différentes classes sur l'axe horizontal de l'histogramme, et on positionne les effectifs corrigés $n_i' = \frac{n_i}{a_i}$ (resp. les fréquences relatives corrigées $f_i' = \frac{f_i}{a_i}$) sur son axe vertical. Puis on trace pour chaque classe C_i un rectangle dont la largeur est proportionnelle à l'amplitude de la classe et la longueur est proportionnelle à l'effectif corrigé n_i' (resp. la fréquence corrigée f_i').

Voir la figure 3.1,

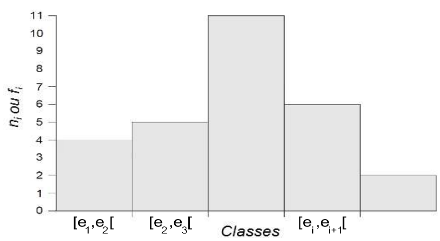


FIGURE 3.1: *Histogramme.*

3.3.1 Polygône des fréquences

Il permet de représenter sous forme de courbe, la distribution des fréquences. Il est obtenu en joignant, par des segments de droite, les milieux des côtés supérieurs de chaque rectangle de l'histogramme. Pour fermer ce polygône, on ajoute à chaque extrémité une classe de fréquence nulle.

Exemple 3.3 *La représentation graphique de l'exemple 3.2 est donnée par l'histogramme suivant :*

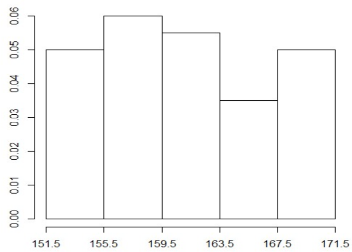


FIGURE 3.2: *Histogramme des fréquences.*

3.4 Effectifs cumulés et fréquences cumulées

Les effectifs cumulés (croissants N_i^+ et décroissants N_i^-) (resp. les fréquences cumulées (croissantes F_i^+ et décroissantes F_i^-)) d'une variable statistique continue sont calculés de la même manière qu'une variable statistique discrète.

Exemple 3.4 *Dans l'exemple précédent (3.2), nous calculons les effectifs cumulés $\Big($croissants (N_i^+) et décroissants $(N_i^-)\Big)$ et les fréquences cumulées $\Big($croissantes (F_i^+) et décroissantes $(F_i^-)\Big)$ pour la série statistique :*

Classe C_i	n_i	f_i	N_i^+	N_i^-	F_i^+	F_i^-
$[151.5, 155.5[$	10	0.20	10	50	0.20	1
$[155.5, 159.5[$	12	0.24	22	40	0.44	0.8
$[159.5, 163.5[$	11	0.22	33	28	0.66	0.56
$[163.5, 167.5[$	7	0.14	40	17	0.8	0.34
$[167.5, 171.5[$	10	0.20	50	10	1	0.2
Total	50	1				

3.5 Représentation graphique des effectifs (resp. fréquences) croissants et décroissants (resp. croissantes et décroissantes)

1. Les effectifs cumulés croissants N_i^+ (resp. les fréquences cumulées croissantes F_i^+) sont représentés par un graphe appelé **courbe cumulative croissante**. Sur l'axe horizontal on positionne les bornes des différentes classes, sur l'axe vertical, on positionne les N_i^+ (resp. F_i^+). Puis on relie par des segments continus les points :

$$(e_0, 0), (e_1, N_1^+), \ldots, (e_i, N_i^+), \ldots, (e_k, N),$$

$$\left(resp.\ (e_0, 0), (e_1, F_1^+), \ldots, (e_i, F_i^+), \ldots, (e_k, 1)\right).$$

En d'autre terme, on relie les points de l'abscisse (la borne supérieure de la classe C_i) et l'ordonnée la valeur de N_i^+ ou F_i^+.

2. Les effectifs cumulés décroissants N_i^- (resp. les fréquences cumulées décroissantes F_i^-) sont représentés par un graphe appelé **courbe cumulative décroissante**, sur l'axe horizontal on positionne les bornes des différentes classes, sur l'axe vertical, on positionne les N_i^- (resp. F_i^-). Puis on relie par des segments continus les points :

$$(e_0, N), (e_1, N_2^-), \ldots, (e_{i-1}, N_i^-), \ldots, (e_k, 0),$$

$$\left(resp.\ (e_0, 1), (e_1, F_2^-), \ldots, (e_{i-1}, F_i^-), \ldots, (e_k, 0)\right).$$

En d'autre terme, on relie les points de l'abscisse (la borne inférieure de la classe C_i) et l'ordonnée la valeur de N_i^- ou F_i^-.

Remarque 3.1 *Le point d'intersection de la courbe de N_i^+ et celle de N_i^- (resp. la courbe de F_i^+ et celle de F_i^-) est le point $(Me, \frac{N}{2})$ (resp. $Me, 0.5$)*

Exemple 3.5 *Afin de mieux comprendre comment représenter les effectifs cumulés et les fréquences cumulées, nous allons représenter les F_i^+ et les F_i^- de l'exemple 3.2.*

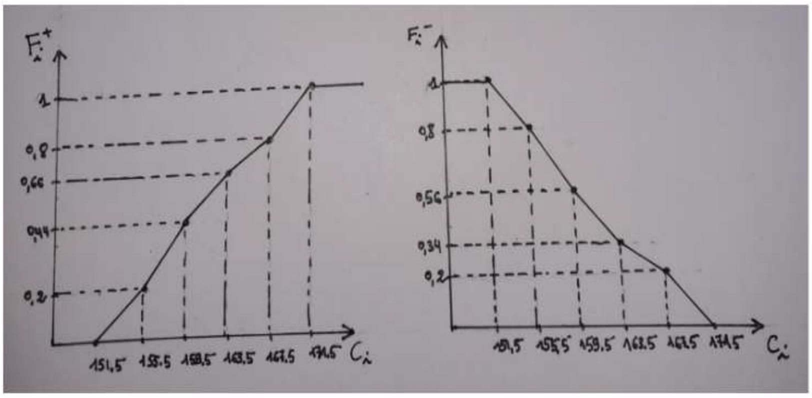


FIGURE 3.3: *Courbe cumulative des fréquences cumulées croissnates et décroissantes qui représente la taille en centimètres de 50 élèves.*

3.6 Fonction de répartition

La fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définie par :
F_X représente le pourcentage d'individus dont la valeur du caractère est inférieure ou égale à x. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < e_0\,; \\ \vdots & \\ F_{i-1} + (x - e_{i-1})\frac{f_i}{a_i}, & e_{i-1} \leq x < e_i\,; \\ \vdots & \\ 1, & x \geq e_k. \end{cases}$$

Exemple 3.6 *La fonction de répartition donnée par la série statistique de l'exemple 3.2 est :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 151.5; \\ 0 + (x - 151.5)\,\frac{0.20}{4} & si\ 151.5 \leq x < 155.5; \\ 0.20 + (x - 155.5)\,\frac{0.24}{4}, & si\ 155.5 \leq x < 159.5; \\ 0.44 + (x - 159.5)\frac{0.22}{4} & si\ 159.5 \leq x < 163.5; \\ 0.66 + (x - 163.5)\frac{0.14}{4} & si\ 163.5 \leq x < 167.5; \\ 0.8 + (x - 167.5)\frac{0.20}{4} & si\ 167.5 \leq x < 171.5; \\ 1, & si\ x \geq 171.5. \end{cases}$$

3.7 Paramètres de position (caractéristiques de tendance centrale)

3.7.1 Mode

Pour calculer le mode d'une manière exacte, nous allons déterminer d'abord **la classe modale**.

Définition 3.1 *La classe modale correspond à la classe qui a le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence relative), elle est notée CMo.*

Supposant que la classe modale est $CMo = [e_{i-1}, e_i[$ et les amplitudes des classes sont égales, le mode est égal à :

$$Mo = e_{i-1} + a_i \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right), \tag{3.1}$$

où

- e_{i-1} : la borne inférieure de la classe modale ;
- a_i : les amplitudes des classes ;
- $\Delta_1 = n_i - n_{i-1}$ ou $\Delta_1 = f_i - f_{i-1}$;
- $\Delta_2 = n_i - n_{i+1}$ ou $\Delta_2 = f_i - f_{i+1}$.

Remarque 3.2 *Dans le cas où les amplitudes sont différentes, on utilise toujours la formule (3.1), mais avec les effectifs corrigés $n'_i = \frac{n_i}{a_i}$ ou les fréquences corrigées $f'_i = \frac{f_i}{a_i}$.*

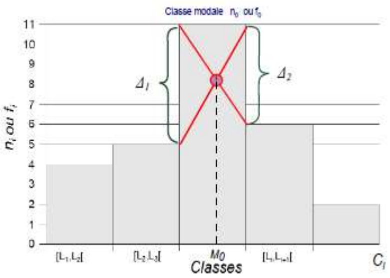


FIGURE 3.4: *Détermination graphique du mode.*

Exemple 3.7 *Dans l'exemple taille des élèves (exemple 3.2), la classe modale est* $CMo = [e_{i-1}, e_i[= [e_1, e_2[= [155.5, 159.5[$.

- $a_i = 4$;
- $\Delta_1 = n_2 - n_1 = 12 - 10 = 2$ *ou* $\Delta_1 = f_2 - f_1 = 0.24 - 0.2 = 0.04$;
- $\Delta_1 = n_2 - n_3 = 12 - 11 = 1$ *ou* $\Delta_1 = f_2 - f_3 = 0.24 - 0.22 = 0.02$;

$Mo = e_{i-1} + a_i(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}) = 155.5 + 4(\frac{2}{2+1}) = 155.5 + 4(\frac{0.04}{0.04+0.02}) = 158.16$

3.7.2 Médiane

Pour calculer la médiane d'une manière exacte, nous allons déterminer d'abord **la classe médiane**.

Définition 3.2 *La classe médiane correspond à l'effectif (ou fréquence) cumulé croissant vérifiant :*

$$N_{i-1}^+ \leq \frac{N}{2} \leq N_i^+ \text{ ou } F_{i-1}^+ \leq 0.5 \leq F_i^+;$$

elle est notée par CMe*, donc la classe médiane est* $CMe = [e_{i-1}, e_i[$.

La classe médiane est $CMe = [e_{i-1}, e_i[$, la médiane Me associée à cette classe est égale à :

$$Me = e_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}^+}{n_i} \right);$$

ou

$$Me = e_{i-1} + a_i \left(\frac{0.5 - F_{i-1}^+}{f_i} \right).$$

Exemple 3.8 *Pour l'exemple 3.2, la classe médiane est :* $[e_{i-1}, e_i[= [e_2, e_3[= [159.5, 163.5[$
car, $22 = N_2^+ \leq 25 \leq N_3^+ = 33$ *ou* $0.44 = F_2^+ \leq 0.5 \leq F_3^+ = 0.66$.

$$Me = 159.5 + 4\left(\frac{25-22}{11}\right) = 160.59;$$

ou

$$Me = 159.5 + 4\left(\frac{0.5-0.44}{0.22}\right) = 160.59.$$

3.7.3 Quartiles

1. **Le premier quartile** Q_1 **:** la classe du premier quartile correspond à l'effectif (ou fréquence) cumulé croissant vérifiant :

$$N_{i-1}^+ \leq \frac{N}{4} \leq N_i^+ \text{ ou } F_{i-1}^+ \leq 0.25 \leq F_i^+;$$

elle est notée par CQ_1, donc la classe du premier quartile est $CQ_1 = [e_{i-1}, e_i[$. Le premier quartile Q_1 est donné par :

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{N}{4} - N^+_{i-1}}{n_i} \right);$$

ou

$$Q_1 = e_{i-1} + a_i \left(\frac{0.25 - F^+_{i-1}}{f_i} \right).$$

2. **Le deuxième quartile Q_2 :** la classe du deuxième quartile correspond à l'effectif (ou fréquence) cumulé croissant vérifiant :

$$N^+_{i-1} \leq \frac{N}{2} \leq N^+_i \text{ } ou \text{ } F^+_{i-1} \leq 0.5 \leq F^+_i;$$

elle est notée par CQ_2. On a $CQ_2 = CMe$ et le deuxième quartile $Q_2 = Me$

3. **Le troisième quartile Q_3 :** la classe du troisième quartile correspond à l'effectif (ou fréquence) cumulé croissant vérifiant :

$$N^+_{i-1} \leq \frac{3N}{4} \leq N^+_i \text{ } ou \text{ } F^+_{i-1} \leq 0.75 \leq F^+_i;$$

elle est notée par CQ_3, donc la classe du troisième quartile est $CQ_3 = [e_{i-1}, e_i[$. Le troisième quartile Q_3 est donné par :

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{3N}{4} - N^+_{i-1}}{n_i} \right);$$

ou

$$Q_3 = e_{i-1} + a_i \left(\frac{0.75 - F^+_{i-1}}{f_i} \right).$$

Exemple 3.9 *Nous calculons le premier, le deuxième et le troisième quartile de l'exemple 3.2 :*

- ***Le premier quartile*** Q_1 ***:*** *la classe du premier quartile* CQ_1 *est :* $CQ_1 = [e_{i-1}, e_i[= [e_1, e_2[= [155.5, 159.5[$
car, $10 = N^+_1 \leq 25 \leq N^+_2 = 22$ *ou* $0.2 = F^+_2 \leq 0.25 \leq F^+_3 = 0.44$;

$$Q_1 = 155.5 + 4 \left(\frac{12.5 - 10}{12} \right) = 156.33;$$

ou

$$Q_1 = 155.5 + 4 \left(\frac{0.25 - 0.2}{0.24} \right) = 156.33.$$

- ***Le deuxième quartile*** Q_2 ***:*** *la classe du deuxième quartile est* $CQ_2 = CMe = [159.5, 163.5[$, *donc le deuxième quartile est* $Q_2 = Me = 160.59$.

- ***Le troisième quartile*** Q_3 ***:*** *la classe du troisième quartile* CQ_3 *est :* $CQ_3 = [e_{i-1}, e_i[= [e_3, e_4[=$

$[163.5, 167.5[$
car, $33 = N_3^+ \leq 37.5 \leq N_4^+ = 40$ *ou* $0.66 = F_3^+ \leq 0.75 \leq F_4^+ = 0.8;$

$$Q_3 = 163.5 + 4\left(\frac{37.5 - 33}{7}\right) = 166.07;$$

ou

$$Q_3 = 163.5 + 4\left(\frac{0.75 - 0.66}{0.14}\right) = 166.07.$$

3.7.4 Moyenne

La moyenne arithmétique $\overline{X}$ d'une variable statistique continue est donnée par la formule suivante :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i; \tag{3.2}$$

où x_i est le centre de la classe $[e_{i-1}, e_i[$.

Exemple 3.10 *La moyenne arithmétique de l'exemple 3.2 qui correspond à la taille des élèves est :*

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{50}(153.5 \times 10 + 157.5 \times 12 + 161.5 \times 11 + 165.5 \times 7 + 169.5 \times 10);\\ &= 161.1.\end{aligned}$$

3.8 Paramètres de dispersion

3.8.1 Étendue :

L'étendue (notée E) dans le cas continu est donnée par :

$$E = e_k - e_0.$$

3.8.2 Variance

La variance $\Big($notée V(X)$\Big)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}V(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{X})^2;\\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \overline{X}^2\end{aligned}$$

3.8.3 Écart-type

L'écart-type (noté σ_X) est donné par la fomule suivante :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

3.8.4 Écart interquartile

L'écart interquartile (noté EIQ) est donné par la formule suivante :

$$EIQ = Q_3 - Q_1.$$

3.8.5 Intervalle interquartile

L'intervalle interquartile (noté IQ) est donné par :

$$IQ = [Q_1, Q_3].$$

Exemple 3.11 *Les paramètres de dispersion de l'exemple 3.2 sont donnés par :*

- *Étendue :* $E = e_k - e_0 = 171.5 - 151.5 = 20.$
- *Variance :*

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{50}(153.5^2 \times 10 + 157.5^2 \times 12 + 161.5^2 \times 11 + 165.5^2 \times 7 + 169.5^2 \times 10) - (161.1^2); \\ &= 31.52. \end{aligned}$$

- *Écart-type :* $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{31.52} = 5.614268.$
- *Écart interquartile :* $EIQ = Q_3 - Q_1 = 166.07 - 156.33 = 9.74.$
- *Intervalle interquartile :* $IQ = [156.33, 166.07].$

3.9 Exercices

Exercice 3.1 *La répartition des revenus mensuels dans une population de 4000 personnes en euro :*

Salaire	$[0, 1000[$	$[1000, 2000[$	$[2000, 3000[$	$[3000, 4000[$	$[4000, 5000[$	$[5000, 6000[$
Effectif	*1431*	*685*	*1180*	*468*	*204*	*32*

1. *Quel est le caractère étudié et quelles sont les modalités ?*
2. *Représenter graphiquement cette distribution.*
3. *Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes*

4. *Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.*

5. *Calculer la moyenne ainsi que l'écart type de cette série.*

6. *En déduire la médiane, les quartiles (Q_1, Q_2, Q_3).*

7. *Parmi les salaires de moins de 1000 euros, les $2/3$ sont inférieurs à 500 euros. Quel nombre de salariés cela représente-t-il ?*

Exercice 3.2 *On donne la série unidimensionnelle suivante, correspondant à la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leur chiffre d'affaire en millions d'euros.*

Chiffre d'affaire	*moins de 0.25*	$[0.25, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2.5[$	$[2.5, 5[$	$[5, 10[$
Nombre d'entreprises	*137*	*106*	*112*	*154*	*100*	*33*

1. *Calculer le chiffre d'affaire moyen et l'écart-type de la série.*

2. *Construire l'histogramme des fréquences.*

3. *Tracer les courbes des fréquences cumulées.*

4. *Déterminer la fonction de répartition de la variable statistique.*

5. *Calculer la médiane et la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaire est supérieur à 3 millions d'euros.*

Exercice 3.3 *Dans une gare routière, on évalue le temps d'attente des voyageurs en minutes. Voici l'histogramme des fréquences absolues de cette variable.*

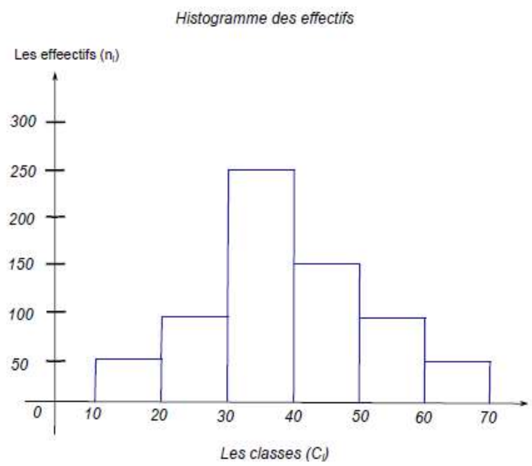


FIGURE 3.5: *Histogramme des effectifs.*

FIGURE 3.6:

1. *Déterminer la variable statistique X, son type et sa population.*
2. *Déterminer le nombre de voyageurs.*
3. *A partir du graphe, déterminer le tableau statistique.*
4. *Tracer les courbes des effectifs cumulés.*
5. *Déterminer le mode graphiquement et dire ce que représente cette valeur par rapport à notre étude.*
6. *Calculer la médiane à partir du graphe de la courbe cumulative.*
7. *Calculer la moyenne et l'écart type.*
8. *Déterminer la fonction de répartition de la variable statistique.*

Exercice 3.4 *On veut comparer l'efficacité du traitement de l'information de plusieurs logiciels pour cela on compare le temps (en centièmes de seconde) que met chaque logiciel à traiter une information commune donnée. On obtient la courbe cumulative suivante :*

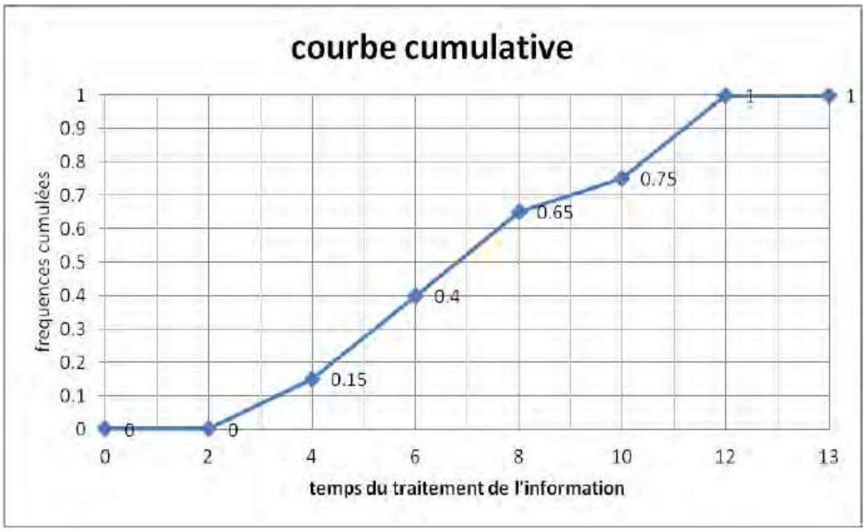


FIGURE 3.7: *Courbe cumulative des fréquences cumulées croissantes.*

1. *Quelle est la population étudiée et sa taille. Quel est le caractère étudié et sa nature ?*
2. *Donner le tableau statistique de cette série ;*
3. *Calculer la moyenne et le 1^{er} quartile ;*
4. *Donner la représentation graphique adéquate ;*
5. *Déterminer la proportion des logiciels dont le temps du traitement de l'information est inférieur ou égal à 5.5 centièmes de seconde.*

CHAPITRE 4

Analyse combinatoire

Sommaire

4.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités. Ces techniques combinatoires sont basées sur un principe fondamental appelé principe de **multiplication**. Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibiltés, alors le nombre total de façons selon lesquelles les étapes peuvent être réalisées est le produit $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$. Toutes les méthodes qui suivent sont basées sur ce principe.

Exemple 4.1 *On lance un dé de six faces* $\Big(n_1 = 6$ *possibilités (1, 2, 3, 4, 5, 6)*$\Big)$*, et on lance une pièce de monnaie* $\Big(n_2 = 2$ *possibilités (pile et face)*$\Big)$*. Alors le nombre total de façons de réaliser les 2 procédures est :* $n = n_1 \times n_2 = 6 \times 2 = 12$ *qui correspond à l'ensemble* $\{P1, P2, P3, P4, P5, P6, F1, F2, F3, F4, F5, F6\}$

4.2 Arrangements

Définition 4.1 *Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle arrangements de p objets* ***toutes suites ordonnées*** *de p objets pris parmi les n objets. Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n objets est noté par :* A_n^p.

Remarque 4.1 *On a nécessairement* $1 \leq p \leq n$ *et* $n, p \in \mathbb{N}^*$
Si $n < p$*, alors* $A_n^p = 0$

4.2.1 Arrangements sans répétition

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements sans répétition de p objets pris parmi n est alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad avec\ 1 \leq p \leq n.$$

Démonstration 4.1

- *Pour le premier objet tiré, il y a* (n) *manières de ranger l'objet parmi* n.
- *Pour le second objet tiré, il n'y a que* $(n-1)$ *manières de ranger l'objet car le premier objet ne peut plus être pris en compte (sans remise).*
- *Pour le* $p^{éme}$ *objet tiré, il y a* $(n-(p-1))$ *manières de ranger l'objet. En utilisant le principe de multiplication on obtient :*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1),$$

de plus

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\frac{(n-p)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-p)\times\ldots\times 2\times 1},$$

d'où

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad avec\ 1 \leq p \leq n.$$

Exemple 4.2 *Combien de mots de 3 lettres distinctes peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?*
Il y a 26 possibilités pour la première lettre, Il y a 25 possibilités pour la deuxième lettre, et il y a 24 possibilités pour la troisième lettre. En utilisant le principe de multiplication on obtient : $26\times25\times24 = 15600$.
donc c'est un arrangement sans répétition de 3 lettres parmi 26 lettres :

$$A_{26}^3 = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24 = 15600.$$

4.2.2 Arrangements avec répétition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements avec répétition de p objets pris parmi n, est alors :

$$A_n^p = n^p, \quad avec\ 1 \leq p \leq n.$$

Démonstration 4.2
- *Pour le premier objet tiré, il existe (n) manières de ranger l'objet parmi n.*
- *Pour le second objet tiré, il existe également (n) possibilités d'arrangements car le premier objet fait de nouveau parti des n objets (avec remise).*
- *Pour le $p^{éme}$ objet tiré, il y a (n) manières de ranger l'objet. En utilisant le principe de multiplication on obtient :*
$$A_n^p = n \times n \times n \ldots n(p\, fois),$$
d'où
$$A_n^p = n \times n \times n \ldots n = n^p.$$

Exemple 4.3 *Soit un ensemble de quatre lettres A, B, C et D. Écrire tous les mots possibles que l'on peut former, avec ou sans répétition, avec deux lettres prises parmi ces quatre lettres :*
AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD.
On obtient seize mots différents, on a quatre choix pour la première lettre, quatre choix pour la deuxième, soit $4 \times 4 = 4^2 = 16$.

4.3 Permutations

4.3.1 Permutations sans répétition

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle permutation de n objets distincts toutes suites ordonnées de n objets. Le nombre de permutations sans répetition (arrangements) de n objets est noté : P_n, avec :.
$$\mathrm{P}_n = n!.$$

Démonstration 4.3 *Ayant n éléments, le premier élément peut être sélectionné de n façons différentes, le second élément de $n-1$ façons et le $n^{ème}$ élément est d'une seule façon. En utilisant le principe de multiplication, le nombre de répartitions possible est :*
$$\mathrm{P}_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!.$$

Exemple 4.4 *De combien de manières peut on placer 8 convives autour d'une table ?*
C'est une permutation sans répétition $\mathrm{P}_8 = 8! = 40320$.

4.3.2 Permutations avec répétition

Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions k d'un même objet parmi les n objets, le nombre de permutations possibles des n objets doit être rapporté aux nombres de permutations des k objets identiques.

Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, ..., n_k sont semblables est :

$$\mathrm{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Exemple 4.5 *Combien de mots différents peut on former à partir du mot "Cellule". Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :*

$$\mathrm{P}_7 = \frac{7!}{3!2!} = 420.$$

4.4 Combinaisons

Pour les combinaisons, on ne parle plus de suite ni de série puisque la notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte, on parle alors de tirage avec ou sans remise.

4.4.1 Combinaisons sans remise

Etant donné un ensemble E de n objets, on appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.
Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n est noté : C_n^p.
Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n et sans remise est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!},\ avec\ 1 \leq p \leq n.$$

Remarque 4.2

1. *Par convention, On pose :* $0! = 1$.
2. *Pour tout entier naturel* p, $0 \leq p \leq n$ *on a :*

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

3. *Pour tout entier naturel* p, $0 \leq p \leq n$ *on a :*

$$C_{n+1}^p = C_n^{p-1} + C_n^p$$

4. ***Formule du Binôme*** *: Pour tous nombres réels* a *et* b *et tout entier naturel* n*, on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

Exemple 4.6 *De combien de façons peut-on former un comité de 3 hommes et de 2 femmes choisis parmi 7 hommes et 5 femmes ?*

- *On peut choisir 3 hommes parmi 7 :* $C_7^3 = 35$ *façons (l'ordre n'intervient pas),*
- *On peut choisir 2 fommes parmi 5 :* $C_5^2 = 10$ *façons (l'ordre n'intervient pas),*
- *Donc le nombre total de comités est* $C_7^2 \times C_5^2 = 35 \times 10 = 350.$

4.4.2 Combinaisons avec remise

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n avec remise est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemple 4.7 *Un groupe de 5 personnes effectue 2 tirages au sort indépendants, l'un pour désigner le chef, et l'autre pour designer celui qui accomplira une certaine tâche.*
Combien y a t'il de combinaisons possibles ?
Celui qui est du groupe peut être aussi celui qui accomplira une tâche, il s'agit donc d'une combinaison avec répétition,

$$K_5^2 = C_{5+2-1}^2 = \frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!} = 15.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1 1. *Combien peut on former de mots de six lettres ?*

2. *Combien peut on former de mots de huit lettres, la première étant une voyelle et la dernière une consonne ?*
3. *On suppose qu'il n'y a pas de répétitions :*
   - **a)** *Combien de nombres de 3 chiffres peut on former à l'aide de ces chiffres 2, 3, 5, 6, 7, et 9 ?*
   - **b)** *Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?*
   - **c)** *Combien sont pairs ?*
   - **d)** *Combien sont impairs ?*
   - **e)** *Combien sont des multiples de 5 ?*

Exercice 4.2 *On appelle anagramme d'un mot, tout autre mot (avec ou sans signification) formé des mêmes lettres (par exemple : lait et lati).*

- *Combien d'anagrammes peut on former avec chacun des mots suivants :*
  a) commission ; *b) boule.*

Exercice 4.3 *Une classe comporte 9 garçons et 12 filles, parmi les comités formés de 4 élèves. Combien y en a t-il qui :*

a) *Comportent au moins une fille ?*

b) *Comportent exactement une fille ?*

c) *Sont mixtes ?*

Exercice 4.4 *Une maîtrèsse de maison a 11 amis trés proches. Elle souhaite en inviter 5 à dîner.*

a) *Combien de groupes différents d'invités y a-t-il ?*

b) *Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?*

c) *Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont en mauvais terme et ne peuvent pas être invités ensemble ?*

CHAPITRE 5

Calcul des probabilités

Sommaire

5.1 Inroduction

La théorie des probabilités joue un rôle fondamental en statistique. La collecte de données statistiques et les enquêtes par sondage dépendent étroitement de la théorie des probabilités. Cette théorie nous permet d'établir le nombre et le choix des élements d'un échantillon représentatif et de calculer les marges d'erreurs. En connaissant la structure de la population considérée, on peut en déduire la structure souhaitable de l'echantillon.
La théorie des probabilités a pour objectif de modéliser des expériences aléatoires où plusieurs issues sont possibles, mais leurs réalisations ne sont pas déterminées à l'avance, par exemple lancer un dé. La théorie des probabilités ne va pas permettre de prédire quelle issue vas se réaliser, mais quelle chance a chaque issue de se réaliser.

Une expérience est appelée aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat, on représente les résultats possibles de cette expérience par l'ensemble Ω, cet ensemble Ω est appelé l'**ensemble fondamental** ou encore **l'univers des possibles**.

- Succession d'appels à un standard téléphonique non surchargé ;
- Observation de la durée de fonctionnement sans panne d'un appareil.

Un ensemble fondamental peut être fini, infini dénombrable, ou infini non dénombrable. Si tous les resultats possibles de l'experience sont dénombrables sur un domaine fini, nous parlons d'un ensemble fondamental fini ;

Exemple 5.1 *On lance un dé équilibré une fois, les résultats possibles de l'expérience sont :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

*cet ensemble fondamental est **fini dénombrable**.*

Exemple 5.2 *On lance une piece de monnaie non truquée autant de fois qu'il est necessaire pour obtenir face. Si on indique le résultat face par F et pile par P, l'ensemble fondamental sera le suivant :*

$$\Omega = \{F, FP, PPF, PPPF, PPPPF, \ldots, PPP\ldots PF, \ldots\}.$$

*Dans cette experience, le nombre de résultats possibles est donc infini, mais dénombrable. L'ensemble fondamental est **infini dénombrable**.*

En revanche, si le nombre de résultats possibles d'une experience forme un ensemble infini non-associable aux entiers naturels, il n'est plus possible de dénombrer tous les élements de l'ensemble. Dans un tel cas, nous sommes en présence d'un ensemble **infini non dénombrable**, ou d'un **ensemble infini continu**. Un exemple pourrait être les valeurs possibles de la vitesse du vent relevées dans les observatoires du pays.

5.2 Évènements d'une expérience aléatoire

Le résultat d'une expérience, c'est-a-dire d'une combinaison de résultats possibles, constitue un **événement**. Mathématiquement, un événement est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental.

Exemple 5.3 *Si nous considérons l'expérience qui consiste à lancer successivement deux dés, l'ensemble fondamental est formé de tous les couples de résultats possibles pour les deux dés ; nous dénombrons par conséquent 36 élements :*

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 1), (2, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

En fonction de cet ensemble fondamental, nous pouvons par exemple décrire les événements suivants :

- *A : "la somme des points est égale à six" :*

$$A = \{(1, 5)(2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

.

- B : *"la somme des points est paire" :*

$$B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),\ldots,(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

.

- C : *"la somme des points est inférieure à six" :*

$$C = \{(1,1)(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

.

5.2.1 Évènements particuliers

a) Évènements élémentaires : Un événement élémentaire est un événement qui ne peut être divisé en d'autres événements. Exemple {(1,2)}

b) Évènement certain : L'événement certain noté Ω est toujours réalisé quelque soit l'issue de l'épreuve.

c) Évènement impossible : L'événement impossible noté $\emptyset$ est un événement qui ne peut pas être réalisé quelque soit l'issue de l'épreuve.

d) Évènements complémentaires ou contraires : L'événement complémentaire ou contraire d'un événement A, noté A^c ou $\overline{A}$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si l'événement A ne l'est pas.

Exemple 5.4 *On lance un dé équilibré une fois, l'événement A"ensemble de nombres pairs", $A = \{2,4,6\}$ son complémentaire est $A^c = \{1,3,5\}$.*

5.2.2 Opérations sur les événements

Soit Ω l'ensemble fondamental. Si on considère la réalisation de deux événements A et B, il est possible d'éffectuer des opérations sur ces ensembles :

a) Intersection : Pour tout couple d'événements A et B, l'événement «A *et* B» est réalisé si A et B sont réalisés. Dans l'espace Ω des événements, l'événement «A *et* B» est représenté par l'intersection des ensembles réalisant A et B, on le note «A *et* B» ou $A \cap B$,

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \; et \; \omega \in B\}.$$

Exemple 5.5 *On lance un dé, l'ensemble fondamental* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *;*
A*"obtenir un chiffre impair",* $A = \{1, 3, 5\}$ *;*
B*"obtenir un chiffre inferieur à six",* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *;*
$A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

b) Union : Pour tout couple d'événements A et B, l'événement «A *ou* B» est réalisé si l'un des deux ou si les deux sont réalisés. Dans l'espace Ω des événements, il est représenté par la réunion des ensembles réalisant A et B, on le note «A *ou* B» ou $A \cup B$;

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}.$$

Exemple 5.6 *On lance un dé, l'ensemble fondamental* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *;*
A*"obtenir un chiffre plus petit que 3",* $A = \{1, 2\}$ *;*
B*"obtenir un multiple de 3",* $B = \{3, 6\}$ *;*
$A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$.

5.2.3 Relations sur les événements

a) Incompatibilité : Deux événements A et B sont incompatibles si la réalisation de l'un implique la non réalisation de l'autre. Dans l'espace Ω des événements, deux événements A et B incompatibles sont représentés par deux parties disjointes, on a alors $A \cap B = \emptyset$.

b) Implication : La relation "l'événement A implique l'événement B " signifie que si A se réalise, alors B se réalise aussi. Dans un tel cas, l'ensemble représentant l'événement A est inclu dans l'ensemble représentant l'événement B. On écrit alors : $A \subset B$.

Exemple 5.7 *Soit une urne contenant des billes rouges unies et des billes vertes unies et striées, si on note :*
A*"Obtention d'une bille striée"*
B*"Obtention d'une bille verte"*
la réalisation de A *implique la réalisation de* B*, car* A *est inclus dans* B*.*

5.2.4 Ensemble des événements (Tribu ou σ-algèbre)

Soit Ω un ensemble fondamental, $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de parties de Ω, i.e. $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu, ou une σ-algèbre, si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- Si A appartient à $\mathcal{A}$, alors son complément $\overline{A}$ appartient aussi à $\mathcal{A}$;
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ et $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

5.2.5 Systèmes complets d'événements

On dit qu'un système d'événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements si :

- $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1, \ldots, n;$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n;$
- $\bigcup_i A_i = \Omega.$

Exemple 5.8 *Jet d'un dé.* $\Omega = \{\omega_i, i = 1, \ldots 6\}$ *est un système complet d'évènements. car :*

- $\omega_i \neq \emptyset, \forall i = 1, \ldots, 6;$
- $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset, \forall i \neq j, i = 1, \ldots, 6, j = 1, \ldots, 6;$
- $\bigcup\limits_i \omega_i = \Omega.$

5.3 Probabilités

Une fois défini l'ensemble des événements auxquels on s'intéresse, on va essayer de traduire par un nombre leurs «possibilités» de réalisation. Cela revient à affecter une mesure de «croyance» à chaque événement, c'est-à-dire un degré de certitude que l'on a que l'événement se produise ou non.

Afin de correspondre à la notion intuitive, une probabilité sera un nombre associé à un événement, compris entre 0 et 1, pour pouvoir se convertir en pourcentage de « chances » ; l'événement certain Ω se voit attribuer la probabilité 1 et l'événement impossible $\emptyset$ la probabilité 0.

Définition 5.1 *On appelle probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *une application* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$*, oú* $\mathcal{A}$ *représente une tribu. Une probabilité satisfait les propriétés suivantes :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1;$
- $\forall A \in \mathcal{A}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1;$
- *Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles* A_1*,* A_2*, …,* A_n*, on a :*

$$\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i).$$

5.3.1 Propriétés

1. L'événement impossible est de probabilité nulle :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0;$$

2. La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par :
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A);$$

3. Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite :
$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B);$$

4. La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B);$$

5. La probabilité de l'intersection de deux événements indépendants est :
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B);$$

6. Si $(A_i)_{i=1:n}$ des événements incompatibles deux à deux ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$) alors :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n); \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i). \end{aligned}$$

Démonstration 5.1 **2.** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A);$

$$\Omega = A + \overline{A} \textit{ et } A \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A + \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A});$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

3. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B);$
$A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap (\overline{A} \cap B))$, *or* $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$;
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \geq 0$;
donc, $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B);$
$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$;
$A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$, *donc* A *et* $(\overline{A} \cap B)$ *sont incompatibles* $\left(\mathbb{P}(A \cap (\overline{A} \cap B)\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cap (\overline{A} \cap B)); \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) - \mathbb{P}(A \cup (\overline{A} \cap B)); \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B). \end{aligned}$$

Or, $B = B \cap \Omega = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$*, par conséquent ;*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (B \cap \overline{A})) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)\end{aligned}$$

donc, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$
Alors, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

6. $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$;
Par récurrence :

- *Pour* $n = 2$,
  $\mathbb{P}(A_1 + A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
- *Supposons que la relation est vraie pour* n *c-à-d :*
  $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$*, nous montrons pour* $n+1$ *:*
  $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1})$*, or, les événements sont incompatibles donc,*
  $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$.

Remarque 5.1
- $\mathbb{P}(A) = 1$ *n'implique pas* $A = \Omega$*. L'événement* A *tel que* $\mathbb{P}(A) = 1$ *est un événement presque certain ;*
- $\mathbb{P}(A) = 0$ *n'implique pas nécessairement* $A = \emptyset$*. Un événement de probabilité nulle n'est pas nécessairement impossible ;*
- *Il ne faut pas confondre un événement indépendant et un événement compatible. Supposons deux événements* A *et* B *à la fois indépendants et incompatibles, on a alors :*
  - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ *indépendants ;*
  - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *incompatibles ;*

  d'oú nécéssairement $\mathbb{P}(A) = 0$ *ou* $\mathbb{P}(B) = 0$.

5.3.2 Concept de probabilité

Considérons une expérience aléatoire dont l'espace fondamental Ω a exactement n éventualités ayant la même chance d'apparition (équiprobabilité) et mutuellement incompatibles. Soit A un événement. Supposons qu'il y a exactement n_A éventualités qui le réalise (l'événement A apparaît n_A fois). Ces épreuves sont dites favorables à l'événement A. La probabilité de l'événement A est alors définie par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

Exemple 5.9 *Soit une famille de 3 enfants, l'ensemble fondamental est donné par :*
$\Omega = \{GGG, FFF, FGF, FFG, GGF, GFG, GFF, FGG\}$, $card(\Omega) = 8$;
A" Avoir au moins deux filles", $A = \{FFG, FGF, GFF, FFF\}$, $card(A) = 4$;
$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Exemple 5.10 *Jet d'un dé. Soit A l'événement "le résultat est un nombre impair".*
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *donc* $card(\Omega) = 6$, $A = \{2, 4, 6\}$ *donc* $card(A) = 3$, *par conséquent,*
$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

5.4 Probabilités conditionnelles

Définition 5.2 *On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un événement B de $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

C'est la probabilité de réalisation de A sachant que B s'est réalisé.

Exemple 5.11 *Soit l'expérience de jet d'un dé deux fois de suite, on définit A par "la somme des chiffres obtenus est inférieure ou égale à 4".*
Calculer la probabilité d'avoir le chiffre 2 au $2^{\text{ème}}$ jet sachant que A est réalisé.
A"La somme des deux chiffres ≤ 4".
$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$, $card(A) = 6$;
B"Avoir le chiffre 2 au $2^{\text{ème}} jet$";
$B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$, $card(B) = 6$;
$\Omega = \{(i, j), 1 \leq i, j \leq 6\}$, $card(\Omega) = 6^2$;
$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$;
$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36}$,
$A \cap B = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{36}$;
$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$.

5.5 Indépendance

La notion d'indépendance intervient de façon constante en probabilités. Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation ou non de l'autre. Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fixé.

5.5.1 Indépendance de 2 événements

On dit que deux événements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

L'indépendance de A et B s'écrit encore $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$ et on trouve la notion intuitive d'indépendance : le fait que A se soit réalisé ne change rien quant à la probabilité que B se réalise.

5.5.2 Indépendance 2 à 2 et Indépendance mutuelle

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On dit qu'ils sont :

- 2 à 2 indépendants si pour tout couple (i, j) d'indices distincts, A_i et A_j sont indépendants;
- Mutuellement indépendants si pour tout ensemble fini d'indices distincts $(i_1, \ldots, i_k)$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

5.6 Théorème de multiplication

Théorème 1 *$\forall A_1, A_2$ deux évèmenets quelqconque de Ω de probabilité non nulle.*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2/A_1) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_1/A_2).$$

Démonstration 5.2 *D'aprés la définition de probabilité conditionnelle on a :*

$$\mathbb{P}(A_2/A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2/A_1).$$

Remarque 5.2 *Si les deux événements sont indépendants alors :*

$$\mathbb{P}(A_1/A_2) = \mathbb{P}(A_1).$$

5.6.1 Généralisation du théorème de multiplication

Théorème 2 *$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements quelconques de Ω de probabilité non nulle.*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration 5.3

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{1}})\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_1)}{1} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \ldots \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n).$$

5.7 Théorème des probabilités totales

Théorème 3 *Soit une partition de Ω en évènements $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de probabilités strictement positives, $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, et incompatibles deux à deux, i.e. avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, et* *soit B un événement quelconque en Ω alors,*

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i).$$

Exemple 5.12
- *Une boite N^o1 contient 3 boules rouges et 2 blanches.*
- *Une boite N^o2 contient 2 boules rouges et 8 blanches.*

On lance une pièce de monnaie régulière, si pile sort, une boule est alors choisie dans la $1^{\text{ère}}$ boite, sinon elle est choisie dans la $2^{\text{ème}}$ boite.
Trouver la probabilité qu'une boule rouge soit choisie.
Solution :
Soit B"une boule rouge est choisie",
soit A_i"la boule choisie provient de la boite i, $i=1,2$",
$\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(pile)=1/2$,
$\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(face)=1/2$,
$\mathbb{P}(B/A_1)=\frac{3}{5}$, *et* $\mathbb{P}(B/A_2)=\frac{2}{10}$,
$\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\frac{2}{10}=\frac{2}{5}$

5.8 Théorème de Bayes

Théorème 4 *Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ muni d'une partition $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, alors pour tout événement B et pour tout indice i on a :*

$$\mathbb{P}(A_i/B)=\frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)}.$$

Démonstration 5.4 *Il suffit en effet d'écrire :*

$$\mathbb{P}(A_i/B)=\frac{\mathbb{P}(B\cap A_i)}{\mathbb{P}(B)}.$$

puis d'utiliser la décomposition $\mathbb{P}(B\cap A_i)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)$ pour le numérateur et la formule des probabilités totales pour le dénominateur.

Exemple 5.13 *Soit trois urnes telles que :*

- *Urne N^o1 : contient 3 boules rouges et 5 noires,*
- *Urne N^o2 : contient 2 boules rouges et 1 noire,*
- *Urne N^o3 : contient 2 boules rouges et 3 noires,*

on prend une urne au hasard et on tire une boule.
Si la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne N^o1 ?
Solution :

B "la boule tirée est rouge",
A_i "la boule tirée provient de l'urne i, $i = 1, 2, 3.$"
$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}(B/A_1) = \frac{3}{8}$,$\mathbb{P}(B/A_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B/A_3) = \frac{2}{5}$.
D'après le théorème de bayes on a :

$$\mathbb{P}(A_1/B) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B/A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B/A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{2}{5}} = 0.26.$$

5.9 Exercices

Exercice 5.1 *Un joueur lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement symétrique.*

1. *Déterminer l'espace fondamental.*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir une seule fois face.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois face.*
4. *Calculer la probabilité d'obtenir 3 piles.*

Exercice 5.2 *On lance successivement deux fois un dé non pipé à six faces.*

1. *Citer tous les résultats possibles lors de la réalisation de cette épreuve aléatoire.*
2. *Calculer la probabilité des évènements suivants :*

   a) *A "Le chiffre obtenu lors du 1^{er} lancer est pair"*
   b) *B "Le chiffre obtenu lors du $2^{\text{ème}}$ lancer est pair"*
   c) *C "Les deux chiffres obtenus ont la même parité".*

Exercice 5.3 *Les mots de passe de la carte magnétique de la poste d'Algérie sont composés de 4 chiffres.*

1. *Trouver le nombre de mots de passe possibles.*
2. *Supposant maintenant que les quatre chiffres des mots de passe sont tous différents. Trouver le nombre de mots passe possibles.*

Exercice 5.4 *Dans la vitrine d'une bijouterie se trouvent 12 montres, 20 bagues, 15 colliers et 7 paires de boucles d'oreilles. Si un voleur casse la vitrine et n'a le temps d'emporter que 6 bijoux.*

- *Quelle est la probabilité qu'il prenne :*
  a) 6 montres, b) 6 bagues, c) 2 montres, 2 colliers et 2 paires de boucles d'oreilles.

Exercice 5.5 *Considérons deux évènements A et B définis à partir d'une même expérience aléatoire telles que : $\mathbb{P}(A) = 0.1$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$.*

- *Déterminer la valeur de la* $\mathbb{P}(A \cup B)$ *sous chacune des hypothèses suivantes :*

  a) A *et* B *sont incompatibles.*

  b) A *et* B *sont indépendants.*

  c) $\mathbb{P}(A/B) = 0.125$

  d) $\mathbb{P}(\overline{A \cap B}) = 0.9$

  e) $A \subseteq B$.

Exercice 5.6 *Dans un lycée de quartier latin,* 25% *des élèves échouent en mathématiques,* 15% *échouent en chimie, et* 10% *échouent à la fois en mathématiques et en chimie. On choisit un élève au hasard.*

1. *Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathéatiques ?*
2. *Si l'élève a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en chimie ?*
3. *Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématiques ou en chimie ?*

Exercice 5.7 *On possède 3 sacs, le premier sac contient 4 pommes et 2 oranges, le deuxième sac contient 2 pommes et 6 bananes alors que le troisième sac contient 5 oranges et 6 bananes.*
On choisit un fruit au hasard.

1. *Quelle est la probabilité de choisir une orange ?*
2. *Si on a choisit une banane, quelle est la probabilité qu'elle provienne du* $2^{\text{ème}}$ *sac ?*

CHAPITRE 6

Variables aléatoires

Sommaire

6.1 Inroduction

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une grandeur mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente éfficacement ce genre de situation concrète est celle d'une variable aléatoire.

Définition 6.1 *Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On appelle variable aléatoire (v.a) sur cet espace, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ telle que :*

$$\begin{aligned} X : \mathcal{A} &\longrightarrow (\mathbb{R} \; ou \; \mathbb{Z}) \\ \omega &\longmapsto X(\omega). \end{aligned}$$

à chaque événement élemantaire ω correspond un nombre réel ou entier x associé à la variable aléatoire X.

6.2 Variables aléatoires discrètes

Définition 6.2 *Une variable aléatoire X est dite discrète si elle ne prend que des valeurs finies ou infinies dénombrables.*

Définition 6.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et E un ensemble fini. On appelle variable aléatoire discrète sur un ensemble fini, l'application X définie de Ω dans E par :*

$$\forall x \in E, X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}.$$

Remarque 6.1 *On note une variable aléatoire par une lettre majuscule (par exemple X) et sa réalisation par une lettre minuscule (par exemple x).*

Exemple 6.1 *Si on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitué des évènements élémentaires suivants :*

$$\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}.$$

Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X "nombre de filles dans la famille" sont :

$$X = \{0, 1, 2\}.$$

6.2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 6.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur Ω et soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des éléments de l'image de Ω par X noté $X(\Omega) = valeur(X)$. La fonction numérique p définie sur $X(\Omega)$ dans $[0, 1]$ par :*

$$p_i = p(x_i) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x_i\})) = \mathbb{P}(X = x_i),$$

s'appelle loi ou distribution de la variable aléatoire X.

Propriété 6.1 *La fonction p possède les propriétés suivantes :*

- $\forall x_i \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i) \geq 0,$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = 1.$

Remarque 6.2 *Si on veut caractériser une variable aléatoire, il faut déterminer :*

1. *ses valeurs : Valeur$(X) = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$,*
2. *sa distribution : $dist(X) = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$.*

Remarque 6.3 *On prendra l'habitude de présenter la distribution de la variable X de la façon suivante :*

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	
$\mathbb{P}(X = x_i) = p(x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_j	$\ldots$	p_n	$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Exemple 6.2 *On lance deux pièces de monnaie, l'ensemble fondamental comprend 4 événements élémentaires $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. On note X "la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenu", donc les $valeur(X) = \{0, 1, 2\}$. On a la tableau suivant :*

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6.2.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition nous indique comment sont réparties les valeurs d'une variable aléatoire.

Définition 6.5 *Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, avec $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. On appelle fonction de répartition X la fonction F définie par :*

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

Dans le cas où la variable aléatoire X est discrète, la fonction de répartition est toujours une fonction discontinue en escalier où :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Propriété 6.2 *La fonction de répartition possède les propriétés suivantes :*

1. *F est positive croissante et continue à gauche ;*
2. *Si $x < x_1$, alors $F_X(x) = 0$;*
3. *$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$;*
4. *Si $x \geq x_n$, elle est égale à 1 ;*
5. *Si $a \leq b$, $\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$;*
6. *$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$.*

Si les valeurs de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors les valeurs de la fonction de répartition peuvent être calculées comme suit :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < x_1 ; \\ F_X(x_{i+1}), & si\ x \in [x_i, x_{i+1}[, i = 1 \ldots n-1 ; \\ 1, & si\ x \geq x_n. \end{cases}$$

avec

$$F_X(x_{i+1}) = \sum_{j=1}^{i} p_j$$

Exemple 6.3 *Jet d'un dé. $X = i$, le dé donne le chiffre i.*
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :
$\mathbb{P}(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si i=1,...,6;} \\ 0, & sinon. \end{cases}$

- *Si $x < 1$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X < 1) = 0$;*
- *Si $x \leq 1$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$;*
- *Si $x \leq 2$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{6}$;*
- *Si $x \leq 3$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X < 4) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{2}$;*
- *Si $x \leq 4$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 4) = \mathbb{P}(X < 5) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{3}$;*
- *Si $x \leq 5$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 5) = \mathbb{P}(X < 6) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = \frac{5}{6}$;*
- *Si $x \geq 6$, $F_X(x) = \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x< 1; \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2; \\ \frac{2}{3}, & 2 \leq x < 3; \\ \frac{3}{6}, & 3 \leq x < 4; \\ \frac{4}{6}, & 4 \leq x < 5; \\ \frac{5}{6}, & 5 \leq x < 6; \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

6.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

Considérons une variable aléatoire discrète X prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et suivant la loi de probabilité $p_i = \mathbb{P}(X = x_i), i = 1, 2, \ldots, n$,

Moments

Moment d'ordre r
Pour tout entier naturel r, on appelle moment d'ordre r de X et on note $m_r(X)$ la quantité :

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Espérance mathématique
On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire X, et on note $E(X)$ le moment d'ordre 1 de la variable X :

$$E(X) = m_1(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

l'espérance mathématique permet d'estimer la valeur moyenne de la loi de probabilité.

Propriété 6.3 *Soit une variable aléatoire X et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $E(a) = a$,
2. $E(a + X) = E(a) + E(X) = a + E(X)$ *(car l'espérance E est un opérateur linéaire),*
3. $E(aX) = aE(X)$,
4. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ *(car l'espérance E est un opérateur linéaire).*

Variance

La variance de la variable X notée $V(X)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} V(X) &= E\big(X - E(X)\big)^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right]^2. \end{aligned}$$

Propriété 6.4 *On suppose que X est une variable aléatoire discrète et $a, b \in \mathbb{R}$.*

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(a) = 0$;
3. $V(a + X) = V(X)$, *(la variance est invariante par translation)*;
4. $V(aX) = a^2 V(X)$;
5. $V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2 V(X)$;
6. $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ *si X_1 et X_2 sont indépendantes.*

Démonstration 6.1
1. $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 \geq 0$, *évident par définition.*
2. *Soit a une constante* $\Rightarrow V(a) = E\big(a - E(a)\big)^2 = E(a - a)^2 = 0$.
3. $V(a + X) = E\big((a + X) - E(a + X)\big)^2 = E\big(a + X - a - E(X)\big)^2 = E\big(X - E(X)\big)^2 = V(X)$.
4. $V(aX) = E\big(aX - E(aX)\big)^2 = E\big(aX - aE(X)\big)^2 = a^2 E\big(X - E(X)\big)^2 = a^2 V(X)$.
5. $V(aX + b) = E\big((aX + b) - E(aX + b)\big)^2 = a^2 E\big(X - E(X)\big)^2 = a^2 V(X)$.

Écart-type

L'écart-type sert à mesurer la dispersion de la variable aléatoire X autour de la moyenne.
On appelle écart-type de la variable aléatoire X et on note σ_X, la racine carrée de la variance :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur Ω et soit les valeurs de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et de loi de probabilité $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$. On appelle fonction génératrice de la variable X et on note G_X la fonction défnie par :

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{i=1}^{n} p_i s^{x_i}, \ s \in \mathbb{R}.$$

Propriété 6.5 *1.* $G^{'}(1) = E(X)$;

2. $G^{''}(1) + G^{'}(1) - (G^{'}(1))^2 = V(X)$.

Fonction caractéristique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur Ω et soit les valeurs de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et de loi de probabilité $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$. Si t est un paramètre réel, $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$ est une variable aléatoire complexe. Comme elle est bornée ($|e^{itX}| > 1$), par conséquent elle admet une espérance mathématique. L'espérance mathématique de la variable e^{itX} s'appelle fonction caractéristique de la variable X et on écrit :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}.$$

Propriété 6.6 *1. La fonction caractéristique est bornée.*

$$|\varphi_X(t)| = |\sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}| \leq \sum_{k=1}^{n} p_k |e^{itx_k}| = 1.$$

2.

$$\varphi_X(0) = 1.$$

$$\varphi_X(0) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{i0x_k} = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Théorème 5 *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la fonction caractéristique de la somme est égale au produit des fonctions caractéristiques.*

$$\varphi_{(X+Y)}(t) = \varphi_X(t).\varphi_Y(t).$$

Démonstration 6.2

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E[e^{itX}.e^{itY}] = E[e^{itX}].E[e^{itY}] = \varphi_X(t).\varphi_Y(t).$$

On supposera sans démonstration que e^{itX} et e^{itY} sont deux variables aléatoires indépendantes.

6.3 Lois discrètes usuelles

6.3.1 Loi de bernoulli

Considérons une expérience aléatoire ayant deux issues possibles (succès, échec ; défectueux, non défectueux, etc). Soit p la probabilité de réalisation de la première issue et $q = 1 - p$ la probabilité de réalisation de la seconde issue. On définit la variable aléatoire discète X comme suit :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si la première issue s'est réalisée ;} \\ 0, & \text{si la première issue s'est réalisée.} \end{cases}$$

On a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $X \curvearrowright \mathcal{B}(p)$.

Remarque 6.4 *La loi de Bernoulli est utilisée pour modéliser des matériels qui seront soit survivants (valeur 1), soit défaillants (valeur 0) à un instant donné. Elle s'applique aux jeux de hasard de type binaire comme pile ou face, etc.*

Espérance mathématique

$$E(X) = 1p + 0(1 - p) = p$$

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (1^2 p + 0^2(1 - p)) - p^2 = p^2 - p = p(1 - p).$$
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}.$$

Fonction génératrice

$$G_X(s) = E(s^X) = s^1 p + s^0(1 - p) = sp + (1 - p).$$

Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = e^{it1}p + e^{it0}(1 - p) = pe^{it} + (1 - p).$$

6.3.2 Loi binomiale

Si l'ont répète une expérience aléatoire ayant deux issues possibles n fois d'une façon indépendante, et que l'on s'intéresse à la variable aléatoire discrète X définie comme étant le nombre de fois où la première issue (succès) s'est réalisée, alors les valeurs de X sont $X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et la loi de probabilité de X aura la forme suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, \ldots, n.$$

On dit alors que cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \curvearrowright \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque 6.5
1. *La loi de la variable* $X \curvearrowright \mathcal{B}(n_1, p)$, *la loi de la variable* $Y \curvearrowright \mathcal{B}(n_2, p)$, *alors* $X + Y$ *suit une loi binomiale de paramètres* $n_1 + n_2$ *et* p, $S = X + Y \curvearrowright \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$
2. *Si* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes telle que* $X_i \curvearrowright \mathcal{B}(p)$, $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \curvearrowright \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque 6.6 *La loi binomiale décrit des phénomènes ne pouvant prendre que deux états s'excluant mutuellement, succès ou échec dans un jeu, bonne pièce ou pièce défectueuse dans une fabrication, lot acceptable ou lot refusé, défaillance ou fonctionnement d'un matériel, etc.*

Espérance mathématique

$$E(X) = np.$$

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p).$$
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}.$$

Fonction génératrice

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k = (ps + (1-p))^n.$$

Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pe^{it})^n.$$

Exemple 6.4 *On veut réaliser une étude clinique sur des malades se présentant à une consultation hospitalière. Pour cette étude, seuls les malades répondant à un ensemble de critères C sont retenus. Des statistiques antérieures ont montré que 20% des consultants présentent les critères C. 10 malades viennent consulter le premier jour.*

Soit X la variable aléatoire «nombre de malades retenus» c'est-à-dire répondant à l'ensemble des critères C. La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.02)$.

- *La probabilité qu'aucun malade ne soit retenu ce jour est égale à :*

$$\mathbb{P}(X = 0) = C_{10}^{0}(0.02)^0(1 - 0.02)^{10-0} = 0.107.$$

- *La probabilité pour qu'il y ait au moins un malade retenu est égale à :*

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.107 = 0.803.$$

6.3.3 Loi uniforme

On dit qu'une variable X suit une loi uniforme sur l'ensemble des valeurs $\{1, 2, \ldots, N\}$, si $X = \{1, 2, \ldots, N\}$, alors $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{N}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. On note $X \curvearrowright \mathfrak{U}_{\{1,2,\ldots,N\}}$.

Espérance mathématique

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i - E(X)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}.$$

6.3.4 Loi géométrique

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement pour la première fois (succès), alors les valeurs de la variable sont $X = \{1, 2, \ldots, \infty\}$, et sa loi de probabilité aura la forme suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots, \infty$$

où p est la probabilité de réalisation de la première issue. On dit alors que X suit une loi géométrique de paramètre p. On écrit $X \curvearrowright \mathcal{G}(p)$.

Espérance mathématique

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Fonction génératrice

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty} ss^{k-1}(1-p)^{k-1} = ps\sum_{k=0}^{\infty}(ps)^{k-1} = \frac{ps}{1-ps}.$$

Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{e^{-it}-(1-p)}.$$

Exemple 6.5 *Un certain matériel a une probabilité $p = 0,02$ constante de défaillance à chaque mise en service. On procède à l'expérience suivante, l'appareil est mis en marche, arrêté, remis en marche, arrêté, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la panne est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p. La probabilité que ce matériel tombe en panne (pour la première fois) au dixième essai est égale à :*

$$\mathbb{P}(X = 10) = 0.02(1-0.02)^{10-1} = 0.0167.$$

6.3.5 Loi hypergéométrique

Soit une urne contenant N boules dont M sont rouges et $N-M$ sont blanches. Tirons n boules ($n \leq N$) au hasard de l'urne sans les remettre (tirage sans remise). Soit X la variable aléatoire "nombre de boules rouges parmi les n boules tirées". Les valeurs k de la variable aléatoire X sont telles que : $0 \leq k \leq M$, $k \leq n$ et $k \geq n-(N-M)$. Par conséquent, les valeurs de X sont : $X = \{\max(0, n-N+M), \ldots, \min(M, n)\}$, et sa loi de probabilité aura la forme suivante :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \forall k \in \ valeurs(X).$$

On dit alors que cette variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On note $X \curvearrowright \mathcal{H}(N, n, p)$.

Espérance mathématique

$$E(X) = np.$$

$p = \frac{M}{N}$ étant la probabilité de tirer une boule rouge.

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)\frac{N-n}{N-1}}.$$

Remarque 6.7 *La loi hypergéométrique est utilisée, en particulier dans les contrôles de qualité où on retire, de la population étudiée, les éléments défaillants.*

Exemple 6.6 *Dans une assemblée de 30 personnes, il y a 20 hommes et 10 femmes. On tire un échantillon de 15 personnes (tirage sans remise). Soit X la variable aléatoire « nombre d'hommes » dans cet échantillon, les valeurs de X sont $X = \{5, \ldots, 15\}$ car :*

- *5 : la valeur 0 ne peut pas être obtenue car il n'y a pas 15 femmes dans l'assemblée $(\max\{0, n - N + M\})$.*
- *15 : dans l'échantillon, il n'y aura pas de femmes $(\min\{n, M\})$.*

Donc la variable X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(30, 15, \frac{20}{30})$.
La probabilité d'avoir 10 hommes dans l'échantillon de 15 personnes est :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{C_{20}^{10} C_{30-20}^{15-10}}{C_{30}^{15}} = 0.30.$$

6.3.6 Loi de poisson

La loi de Poisson décrit généralement les probabilités d'apparition d'un événement très rare sur un grand nombre d'observations. Par exemple le nombre de fautes d'impressions sur une page, le nombre de personnes souffrant d'une maladie rare, etc. La loi de Poisson, s'applique souvent à des problèmes de files d'attente. Cette loi est sous certaines hypothèses, une approximation de la loi binomiale.

La loi de Poisson de paramètre λ est la loi d'une variable aléatoire discrète réelle X, prenant toutes les valeurs entières non négatives $(X = \{0, 1, 2, \ldots\})$, avec les probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ avec\ k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Espérance mathématique

$$E(X) = \lambda.$$

Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda.$$
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

Fonction génératrice

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Exemple 6.7 *Si le nombre moyen d'arrivées de clients à un guichet par minute est égal à* 1.9*,*

1. *Calculons la probabilité d'observer 5 arrivées dans une minute donnée, supposant que les arrivées sont indépendantes les unes des autres.*
2. *Calculons la probabilité d'observer au moins 4 arrivées dans une minute donnée.*

Solution :
Soit X la variable "nombre moyen d'arrivées de clients". X suit une loi de Poisson $\mathbb{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 1.9$.
La loi de X est : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

1. $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{e^{-1.9}1.9^5}{5!} = 0.0309.$
2. $\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{e^{-1.9}1.9^k}{k!}$. *On peut aussi écrire*
   $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)] = 0.1495686 + 0.2841804 + 0.2699714 + 0.1709819 = 0.8747023$

6.4 Variables aléatoires continues

Définition 6.6 *Une variable aléatoire X est dite continue si elle prend ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points, elle décrit par exemple la durée de vie d'une batterie de voiture, l'heure d'arrivée des voitures à un péage donné d'autoroute,etc.*

Définition 6.7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, la variable aléatoire X définie de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite continue si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est un intervalle ou une réunion d'intervalles dans $\mathbb{R}$.*

6.4.1 Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue

Définition 6.8 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, on dit que la variable aléatoire* X *est absolument continue si elle est continue et si de plus, il existe une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *possèdant les propriétés suivantes :*

(i) $f(x) \geq 0$;

(ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Propriété 6.7 *Soient* a *et* $b \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$
- $\mathbb{P}(X = a) = 0.$
- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$
- $\mathbb{P}(X > a) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx.$

6.4.2 Fonction de répartition

Définition 6.9 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité, On appelle fonction de répartiton de la variable aléatoire continue* X*, la fonction numérique positive,* F *définie par :*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

Alors la relation entre la fonction de répartition F_X et la fonction de densité de probabilité $f(x)$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Propriété 6.8 **(i)** F *est continue et croissantes sur* $\mathbb{R}$;

(ii) *Si* f *est continue aux points* x*, alors* $f(x) = F_X^{'}(x)$;

(iii) $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a).$

6.4.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire continue

Moments

Moment d'ordre r
Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité. Soit r un entier naturel. On dit que X admet un moment d'ordre r, si la fonction qui à $x \longrightarrow x^r f(x)$ est intégrable. Dans ce cas le moment d'ordre r de X est :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx.$$

Espérance mathématique
On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, qu'on note $E(X)$ le moment d'ordre 1 de la variable X :

$$E(X) = m_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Variance et Écart-type

La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire continue X, sont définis comme suit :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 6.8 *Pour calculer la variance dans la pratique, on utilise la formule suivante :*

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2.$$

Fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité de probabilité. On appelle fonction génératrice de la variable X et qu'on note G_X la fonction définie par :

$$G_X(s) = E(s^X) = \int_{-\infty}^{\infty} s^x f(x) dx.$$

Fonction caractéristique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire continue et f sa densité de probabilité. Si t est un paramètre réel, $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$ est une variable aléatoire complèxe. Comme elle est bornée ($|e^{itX}| < 1$), par conséquant elle admet une espérance mathématique. L'espérance mathématique de la varible e^{itX} s'appelle fonction caractétistique de la variable X et on écrit :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Exemple 6.8 *Soit X une variable aléatoire continue ayant la distribution (la loi ou la densité) :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Calculer $\mathbb{P}(1 \leq x \leq 1.5)$.*
2. *Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, $V(V)$ et σ_X.*
3. *Calculer la fonction de répartition.*

Solution

1. $\mathbb{P}(1 \leq x \leq 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)dx = \int_1^{1.5} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^{1.5} 0.31.$
2. $E(X) = \int_0^2 x f(x) dx = \int_1^{1.5} x \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3}]_0^2 = \frac{4}{3}$
   $E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_1^{1.5} x^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}[\frac{x^4}{4}]_0^2 = 2$
   $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - (\frac{4}{3})^2 \Rightarrow V(X) = \frac{2}{9}$
   $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0.47$
3. *La fonction de répartition*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \end{aligned}$$

- *Si* $x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$
- *Si* $0 \leq x < 2$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \frac{1}{2} t dt = \frac{x^2}{4}.$
- *Si* $x \geq 2$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^2 \frac{1}{2} t dt + \int_2^x 0dt = 0 + 1 + 0 = 1.$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0; \\ \frac{x^2}{4}, & si\ 0 \leq x < 2; \\ 1, & si\ x \geq 2. \end{cases}$$

6.5 Lois continues usuelles

6.5.1 Loi uniforme

Une variable aléatoire réelle X, suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$, si sa loi de probabilité admet une densité f égale à :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & si\ x \in [a,b]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X \curvearrowright \mathcal{U}_{[a,b]}$.

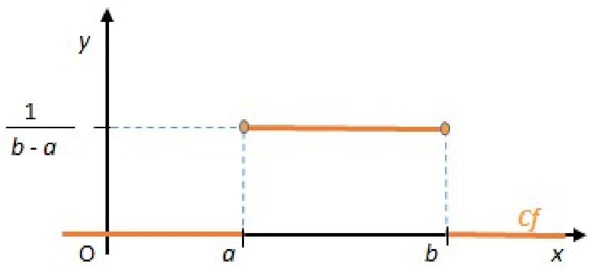


FIGURE 6.1: *Densité d'une variable de loi uniforme*

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par :

- Si $x < a \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$
- Si $a \leq x < b \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a};$
- Si $x \geq b \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{b} f(t)dt + \int\limits_{b}^{\infty} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int\limits_{b}^{\infty} 0dt = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Espérance mathématique

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}.$$

Variance et Écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

Fonction caractéristique

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{e^{it(b-a)}}{it(b-a)}.$$

Remarque 6.9 *La loi uniforme est utilisée en statistique bayésienne, pour déterminer les lois de probabilité a priori, dans le cas de l'ignorance totale, dans l'intervalle [0, 1] ou dans l'intervalle [a, b].*

6.5.2 Loi exponentielle

Une variable aléatoire réelle positive X suit une loi exponentielle, de paramètre λ positif, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X \curvearrowright \mathcal{E}(\lambda)$.

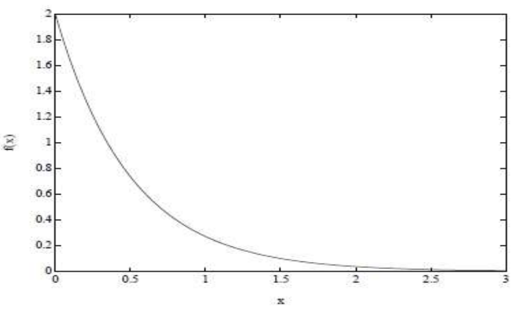


FIGURE 6.2: *Densité d'une variable de loi exponentielle,*

Fonction de répartition

- Si $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;
- Si $x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x}$;

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

Espérance mathématique

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Variance et Écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Fonction caractéristique

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Propriété 6.9 **(i)** *La variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle est dite sans mémoire c.-à-d.*

$$\mathbb{P}(X > s + t / X > t) = \mathbb{P}(X > s),\ \forall s, t \geq 0.$$

Interprétons X comme la durée de vie d'une pièce. Cette propriété exprime le fait que la pièce ne vieillit pas : si la pièce a vécu au moins t unités de temps elle vivra encore s unités avec la même probabilité qu'une pièce neuve. Cette propriété est donc une propriété de non vieillissement ou d'absence de mémoire. Il est remarquable qu'elle soit équivalente au fait que la variable aléatoire X suive une loi exponentielle.

(ii) *La somme de deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre (λ_1+λ_2).*

Démonstration 6.3 *On va montrer que :*

$$\mathbb{P}(X < s + t / X > t) = \mathbb{P}(X < s),\ \forall s, t \geq 0.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < s+t/X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X < s+t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(t < X < s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{F_X(s+t) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{(1 - e^{-\lambda(s+t)}) - (1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} \\ &= \mathbb{P}(X < s).\end{aligned}$$

6.5.3 Loi gamma

La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des lois gamma. Une variable aléatoire réelle positive X suit une loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & si\ x > 0; \\ 0, & si\ x \leq 0. \end{cases}$$

Γ est la fonction gamma, elle est définie par : $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. On note $X \curvearrowright \gamma(\alpha, \beta)$.

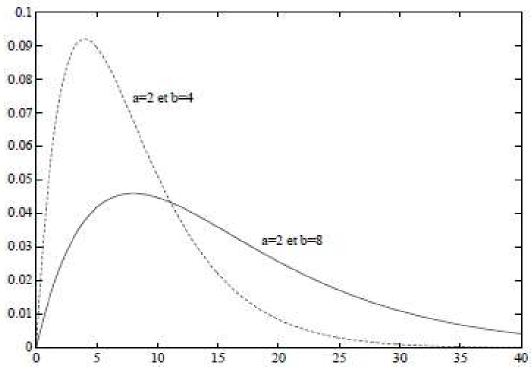


FIGURE 6.3: *Densité d'une variable de loi gamma,*

Fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}\, dt = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}\, dt.$$

On ne connaît pas la valeur explicite de F_X, mais les valeurs de $F_X(x)$ sont tabulées par Pearson.

Espérance mathématique

En utilisant, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, on aura :

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \alpha\beta.$$

Variance et Écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2.$$
$$\sigma_X = \sqrt{\alpha\beta^2}.$$

fonction caractéristique

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx}\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} = (1-\beta it)^{-\alpha}.$$

Propriété 6.10 *selon les valeurs des paramètres, la loi gamma s'identifie à d'autres lois :*

(i) *La loi exponentielle si* $\alpha = 1$*;*

(ii) *La loi d'Erlang si* α *est égal à un entier n supérieur à 1, sa densité est :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta e^{-\beta x}(\beta x)^{n-1}}{(n-1)!}, & si\ x \geq 0; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

sachant que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(iii) *la loi de la variable khi-deux à* n *degrés de liberté* $\chi^2_{(n)}$*, utilisée en statistique, si* $\beta = \frac{1}{2}$ *et* $\alpha = \frac{n}{2}$*, où* n *est un entier positif.*

(iiii) *la somme de deux variables aléatoires indépendantes, suivant des lois gamma* $\gamma(\alpha_1, \beta)$ *et* $\gamma(\alpha_2, \beta)$*, suit une loi gamma* $\gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$*.*

6.5.4 Loi Bêta

Une variable aléatoire réelle X, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, suit une loi bêta, notée $\beta(a, b)$, de paramètres positifs a et b, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(a,b)}x^{(a-1)}(1-x)^{b-1}, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\beta(a, b)$ est la fonction Bêta définie par : $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. On note $X \curvearrowright \beta(a, b)$

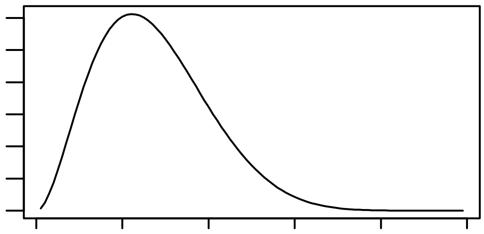


FIGURE 6.4: *Densité d'une variable de loi Bêta,*

Fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\beta(a,b)} t^{(a-1)}(1-t)^{b-1}dt = \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^x t^{(a-1)}(1-t)^{b-1}dt.$$

On ne connaît pas la valeur explicite F_X.

Espérance mathématique

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty x\frac{1}{\beta(a,b)}x^{(a-1)}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{\beta(a,b)}\int_0^\infty x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{1}{\beta(a,b)}\beta(a+1,b) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(car\ \beta(a+b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \right); \\
&= \frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} \times \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\
&= \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

Variance et Écart-type

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - (\frac{a}{a+b})^2 \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.
\end{aligned}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}.$$

Fonction caractéristique

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_0^1 e^{itx} f(x)dx = \int_0^1 e^{itx} \frac{1}{\beta(a,b)} x^{(a-1)}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^\infty e^{itx} x^{(a-1)}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k x^k}{k!} x^{(a-1)}(1-x)^{b-1}dx \ \left(car\ e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} \right) \\
&= \frac{1}{\beta(a,b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_0^1 x^{(a+k-1)}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{1}{\beta(a,b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \beta(k+a,b) \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+k)} \\
\varphi(t) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+b+k)}.
\end{aligned}$$

Remarque 6.10 *Les lois bêta sont utilisées en fiabilité, en statistique bayésienne pour représenter la distribution a priori de la probabilité d'un événement suivant une loi binomiale, la distribution a posteriori suit aussi une loi bêta.*

6.5.5 Loi normale

Une variable aléatoire réelle X, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$, suit une loi de Laplace-Gauss ou loi normale, de paramètres μ et σ, si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \ x \in]-\infty, +\infty[.$$

On note $X \curvearrowright \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. On dit indifféremment qu'une variable suivant une telle loi est une variable normale ou gaussienne.

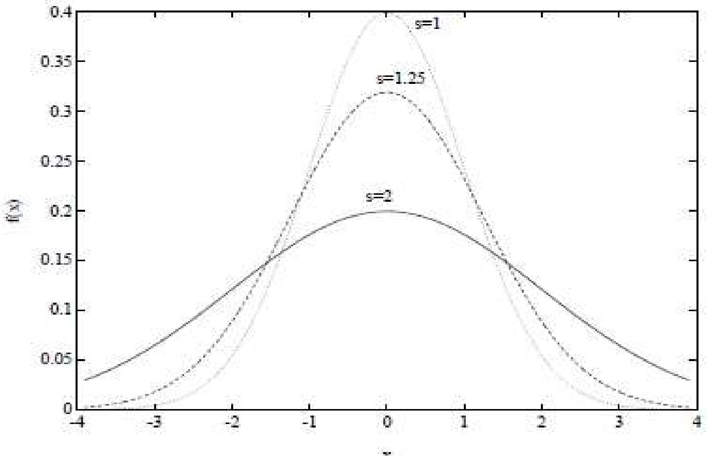


FIGURE 6.5: *Densité d'une variable de loi Normale,*

Fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Espérance mathématique

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu.$$

Variance et Écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sigma.$$

Fonction caractéristique

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\frac{x-(\mu-it\sigma^2)}{\sigma}) - \frac{t^2\sigma^2}{2} + it\mu} dx \\
&= e^{it\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}$$

6.5.6 Loi normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire de loi normale de paramètres μ et σ^2 ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$). La variable aléatoire

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi normale de paramètres 0 et 1 ($\mathcal{N}(0, 1)$), appelée loi normale centrée réduite.

Fonction de répartition

$$\phi(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

on a pas la forme explicite de $\phi(y)$, mais les valeurs de $\phi(y)$ sont tabulées.

Propriété 6.11 *Soit ϕ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Alors*

$$\phi(-y) = 1 - \phi(y).$$

Cette propriété résulte de la symétrie de la densité de la loi normale.

Espérance mathématique et variance

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la variable qui suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$E(Y) = E(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = 0$$

$$V(Y) = V(\frac{X - \mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2} V(X - \mu) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique de la variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est :

$$\varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Alors la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ sera :

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

6.6 Approximation d'une loi par une autre

6.6.1 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

On utilise le résultat d'approximation suivant :

Théorème 6 *Si n est assez petit par rapport à N on peut approcher une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ par la loi binomiale ayant la même espérance mathématique $\mathcal{B}(n, p)$.*

Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque $n < 0.05N$.

6.6.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Dans la loi binomiale, deux paramètres n et p interviennent ce qui peut compliquer le calcul des probabilités notamment lorsque n devient grand et p petit. On utilise le résultat d'approximation suivant :

Théorème 7 *Si n est assez grand et p est assez petit, alors on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson ayant la même espérance mathématique $\mathcal{P}(np)$.*

Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque $n > 30$, $p < 0.1$ et $np < 10$. Ces données ne sont pas fixes, elles varient généralement d'un auteur à l'autre.

6.6.3 Approximation de la loi binomiale par une loi normale

On utilise le résultat d'approximation suivant :

Théorème 8 *Pour $n \geq 30$ et $np(1-p) \geq 3$, alors on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$*

6.6.4 Approximation de la loi de Poisson par une loi normale

On utilise le résultat d'approximation suivant :

Théorème 9 *Pour $\lambda \geq 20$, alors on peut approcher la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$*

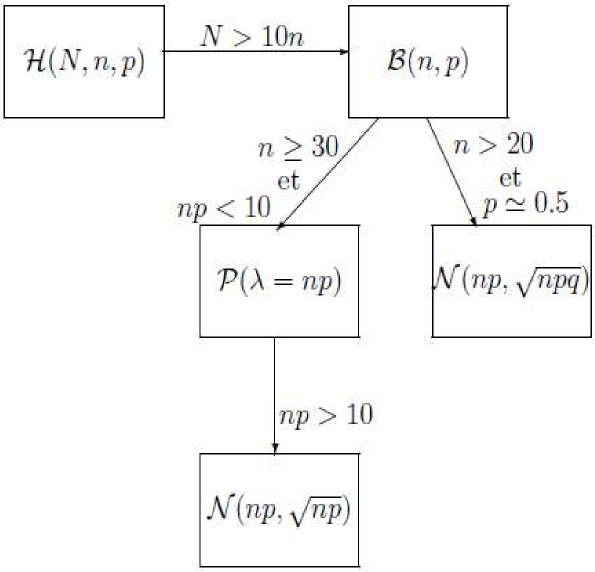


FIGURE 6.6: *Différentes approximations entre différentes lois.*

6.7 Exercices

Exercice 6.1 *Considérons la loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivante :*

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0.1	0.4	0.2	0.1	0 .1	0.1

1. *Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.*
2. *Déterminer l'espérance mathématique et la varaince de X.*
3. *Déterminer l'espérance mathématique et la varaince de : a) $Y = 2X$, b) $Y = \frac{X}{2}$, c) $Y = X - 3$.*

Exercice 6.2 *Une urne contient 6 boules dont trois portent le numéro 0, deux le numéro 1 et une le numéro 2. On fait un tirage de deux boules sans remise. Soit X la variable aléatoire désignant la somme des numéros tirés.*

1. *Donner la loi de probabilité de X (en précisant l'ensemble des valeurs de X).*
2. *Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.*
3. *Calculer sa fonction de répartition.*

4. *Calculer* $P(0.5 \leq X \leq 3)$.

Exercice 6.3 *Soit* p *la fonction définie par :*

$$p(x) = c\frac{x-1}{n}, \quad si\ x \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

1. *Déterminer la valeur de* c *pour que* p *soit une loi de probabilité.*
2. *Déterminer dans ce cas* F_X.
3. *Calculer* $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 5)$ *et* $\mathbb{P}(X \geq n-2)$.
4. *Calculer la moyenne de* X.

Exercice 6.4 *Soit* X *une variable aléatoire discrète de loi de probabilité :*

$$p_X(x) = \frac{e^{-2}2x}{4x!}(1+cx),\ x \in \mathbb{N}.$$

1. *Déterminer la valeur de* c.
2. *Soient* Y, Z *deux variables aléatoires de Poisson de paramètre 2. Montrer que*

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(Y = x) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(Z = x-1).$$

3. *En déduire* $E(X)$.

Exercice 6.5 *Soit* X *une variable aléatoire continue ayant la distribution suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & si\ 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

1. *Déterminer la constante* c *pour que* f *soit une densité de probabilité.*
2. *Calculer* $P(1 \leq X \leq 1.5)$.
3. *Calculer* $E(X)$, $V(X)$ *et* σ_X
4. *Calculer la fonction de répartiton de* X.
5. *Calculer* $P(X \leq 3)$

Exercice 6.6 *Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x) = cxe^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

1. *Déterminer la valeur de* c *pour que* f *soit une fonction de densité d'une variable aléatoire* X.
2. *Calculer la fonction de répartition de* X.

3. *Calculer la moyenne et la variance de X.*

Exercice 6.7 *Soit X une variable aléatoire de densité*

$$f(x) = \frac{c}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

1. *Déterminer la valeur de c pour que f soit une fonction de densité d'une variable aléatoire X.*
2. *Caculer la fonction de répartition de f.*
3. *Déterminer la médiane de X c-à-d la valeur m telle que $\mathbb{P}(X > m) = 1/2$.*
4. *Calculer la moyenne et la variance de X.*
5. *Déterminer le moment d'ordre 3 de X.*

Exercice 6.8 *Le nombre d'ordinateur vendus chaque jour par un magasin spécialisé suit une loi de Poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité que dans une journée :*

1. *on ne vend aucun ordinateur.*
2. *on vend 4 ordinateurs.*
3. *on vend au moins un ordinateur.*
4. *le nombre d'ordinateurs vendus est compris entre 2 et 6.*

Exercice 6.9 *On suppose que le pourcentage moyen de gauchers est de 1%. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre de gauchers dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard.*

1. *Montrer que la loi de X est pratiquement une loi de Poisson dont on précisera la moyenne et la variance.*
2. *Quelle est la probabilité pour qu'il y ait moins de 4 gauchers dans l'échantillon ?*

Exercice 6.10 *Dans un examen de type QCM, on pose 10 questions. Pour chaque question on propose au candidat 3 réponses dont une seule est juste. Une personne ignorant totalement le sujet se présente à cet examen et coche les réponses pour chaque question au hasard. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de réponses justes.*

1. *Quelle est la loi de X ?*
2. *Quelle est la probabilité que cette personne donne 3 réponses justes ?*
3. *Une personne est admise si elle donne au moins 5 réponses justes. Quelle est la probabilité que cette personne soit admise ?*

Exercice 6.11 *Une usine fabrique 9000 unités d'un certains produit en un temps. Pour cette même période, la demande en milliers d'unités concernant ce produit peut être considérée comme une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/3$.*

1. *Quelle est la probabilité que la demande dépasse la production ?*

2. *Quelle devrait être la production pour que cette demande ne dépasse pas* 4%.

Exercice 6.12 *Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.*

1. *Soit* X *la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm" ; on suppose que* X *suit une loi normale de paramètres* $m = 0.3$ *et* $\sigma = 0.1$. *Calculez la probabilité pour que* X *soit inférieur à* $0.36mm$ *et la probabilité pour que* X *soit compris entre* 0.25 *et* $0.35mm$.

2. *L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler* n, *numérotées de 1 à* n *en les prenant au hasard : soit* X_i *la variable aléatoire "épaisseur de la plaque numéro* i *en mm" et* Z *la variable aléatoire "épaisseur des* n *plaques en mm". Pour* $n = 20$, *quelle est la loi de* Z, *son espérance et sa variance ?*

Exercice 6.13 *On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion* $p = 0.02$ *est défectueuse.*

1. *On contrôle un lot de 1000 pièces :*
   Soit X *la variable aléatoire : "nombre de pièces défectueuses parmi 1000". Quelle est la vraie loi de* X *? (on ne donnera que la forme générale) ; quelle est son espérance et son écart-type ?*

2. *En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que* X *soit compris entre 18 et 22* $(\mathbb{P}(18 \leq X \leq 22))$.

Chapitre 7

Convergence de suites de variables aléatoires

Sommaire

7.1 Introduction

Il existe de nombreuses notions de convergence de variables aléatoires qui sont essentielles pour les applications et représentent l'outil mathématique indispensable pour fonder le calcul des probabilités et la statistique mathématique. Elles servent aussi à montrer que les phénomènes aléatoires présentent certaines régularités, à partir desquelles on peut identifier certaines de leurs propriétés.
Tout au long de ce chapitre, $\{X_n, n \geq 1\}$ désignera une suite de variables aléatoires.

7.2 Convergence en probabilité

Définition 7.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que X_n converge en* probabilité *vers une variable aléatoire X et on note $X_n \xrightarrow{P} X$, où $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ en* *probabilité, si pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Propriété 7.1 **(i)** *Si* $E(X_n) = L$*, il suffit de montrer que* $V(X_n) \to 0$*, pour établir la convergence en probabilité de la suite* X_n *vers la variable* L*.*

(ii) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires de variance finie. Pour que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* X *possédant aussi une variance finie, il suffit que l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire* $(X_n - X)$ *tendent vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*

Proposition 7.1 *Soit* $\{X_n, Y_n, n \geq 1\}$ *deux suites de variables aléatoires,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Supposons que* $\{X_n, n \geq 1\}$ *(resp.* $\{Y_n, n \geq 1\}$*) converge en probabilité vers une variable aléatoire* X *(resp.* Y *), alors*

- *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y$.
- $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$.
- $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Exemple 7.1 *Considérons la suite de variables aléatoires* (X_n)*, chaque variable prenant deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités suivantes :* $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ *et* $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$
La suite (X_n) *converge en probabilité vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*
En effet si $\epsilon > 0$*, alors deux cas peuvent se présenter :*

- *Premier cas : si* $\epsilon > 1$ *:*
  dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(\{|X_n - 0| \geq \epsilon\}) = \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) = 0.$$

- *Deuxième cas : si* $0 \leq \epsilon \leq$*:*
  dans ce cas on a :

$$\mathbb{P}(\{|X_n - 0| \geq \epsilon\}) = \mathbb{P}(X_n \geq \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n};$$

  d'où $X_n \xrightarrow{P} 0$.

7.3 Convergence en moyenne

La convergence en moyenne, est très utilisée dans les problèmes d'estimation statistique.

Définition 7.2 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles de moyenne et de variance finies, et* $E(|X_n - X|^p)$ *existe, on dit que* X_n *converge en* moyenne d'ordre p *vers la variable aléatoire* X *si*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

A partir de ce mode de convergence découle des cas particuliers : la convergence en moyenne quadratique et en moyenne.

Définition 7.3 *On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne vers une variable aléatoire* X*, si*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

La convergence en moyenne quadratique, est très utilisée dans les problèmes d'estimation statistique.

Définition 7.4 *On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire* X*, si :*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

Remarque 7.1
- *Si la suite* X_n *converge en moyenne quadratique vers* X*, et que si la suite* Y_n *converge en moyenne quadratique vers* Y*, alors la suite* X_nY_n *converge en moyenne vers* XY*.*
- *La convergence en moyenne d'ordre* p *implique la convergence en probabilité.*
- *La convergence en moyenne quadratique entraîne la convergence en probabilité.*

Exemple 7.2 *Considérons la suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 1}$ *où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives* $1 - e^{-n}$ *et* e^{-n}*, c-à-d* $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - e^{-n}$ *et* $\mathbb{P}(X_n = 1) = e^{-n}$*. Alors* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 en moyenne. Donc, si* $n \geq 0$ *alors*

$$E(|X_n - 0|) = E(|X_n|) = e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

7.4 Convergence en loi

La convergence en loi est la plus faible, mais elle est très utilisée en pratique car elle permet d'approximer la fonction de répartition de X_n par celle de X.

Définition 7.5 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, et une variable aléatoire* X *définie également sur cet espace. On dit que* X_n *converge en loi vers* X *lorsque* n *tend vers l'infinie, et on écrit* $X_n \xrightarrow{L} X$*, si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(x) &= F(x), \; en\ tout\ point\ de\ continuit\acute{e}\ x\ de\ F;\\
\lim_{n\to\infty} \int \phi(X_n)dP &= \int \phi(X)dP, \; pour\ toute\ fonction\ continue\ born\acute{e}e, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\\
\lim_{n\to\infty} \varphi(X_n) &= \varphi(X), \; pour\ tout\ x\ de\ \mathbb{R}\ (\varphi\ est\ une\ fonction\ caract\acute{e}ristique).
\end{aligned}$$

Théorème 10 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, Soit* X *une autre variable aléatoire définie sur le même espace. Si* X_n *converge en Probabilité vers* X*, alors* X_n *converge en loi vers* X*.*

Remarque 7.2 • *Lorsque les variables aléatoires X_n et X sont discrètes, on dit que X_n converge en loi vers X, si :*

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Pour le cas des variables aléatoires discrètes, cette notion de convergence est utilisée par exemple pour l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

• *Si X_n et X sont des variables absolument continues, on sait alors que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si X_n et X sont définies par des densités f_n et f, on dit que X_n converge en loi vers X si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

• *L'intégrale d'une limite n'est pas nécessairement la limite de l'intégrale. La condition $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ est donc insuffisante pour affirmer la convergence de X_n vers X. Il faudra intégrer ces différentes fonctions avant de passer à la limite.*

7.5 Convergence presque sûre

Définition 7.6 *Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ converge presque sûrement (p.s) vers la variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, si*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.;$$

ou bien

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = 0.$$

Dans ce cas on note $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ *p.s ou* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$.

En d'autres termes, l'ensemble des points de divergence est de probabilité nulle. Remarquons que la limite de (X_n) n'est pas unique mais que deux limites sont presque sûrement égales.

Théorème 11 *La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité (et à fortiori la convergence en loi).*

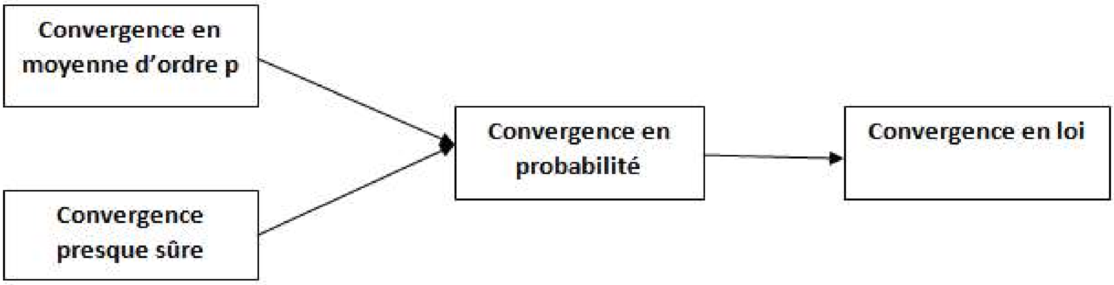


FIGURE 7.1: *Schéma des implications entre les diverses convergences.*

7.6 Lois des grands nombres

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, dans cette partie on s'intéresse au comportement des moyennes arithmétiques

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

lorsque n devient de plus en plus grand. Les résultats concernant ce problème sont appelés : Lois des Grands Nombres. Ces résultats se décomposent en deux parties :

- Lois fortes des grands nombres.
- Lois faibles des grands nombres.

La différence entre ces deux familles de résultats réside dans le mode de comportement qu'on étudie, dans la première on s'intéresse au comportement ponctuel (convergence presque sûre), alors que dans la seconde on regarde le comportement en probabilité (convergence en probabilité) qui est plus faible.

7.6.1 Loi faible des grands nombres

Pour un nombre d'expériences indépendantes suffisamment grand, la moyenne arithmétique des valeurs observées d'une variable aléatoire converge en probabilité vers son espérance mathématique.

Théorème 12 *(de Tchebytchev). Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi ayant une espérance mathématique m et une variance σ^2. Soit la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$ Alors, la suite S_n converge en probabilité vers l'epérance mathématique m commune aux variables aléatoires X_i, c-à-d,*

$$\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - m| < \epsilon) = 1.$$

Démonstration 7.1

$$E(X_i) = m,\ V(X_i) = \sigma^2,\ \forall i = \overline{1,n}.$$

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}nm = m;\ V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev : $(\mathbb{P}(|X - E(X)| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2})$. *On a :*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}. \text{ Or quand } n \to \infty, \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0.$$

Par conséquent,

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - m| \geq \epsilon) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|S_n - m| \geq \epsilon) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|S_n - m| < \epsilon) = 1.$$

S_n *converge donc en probabilité vers* m.

Théorème 13 *(Tchebytchev). Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérances* $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ *finies et de variances* $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$ *finies. Si*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty;$$

alors,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m_S \text{ en probabilité};$$

où $m_S = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Démonstration 7.2

$$V(S_n) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2.$$

D'après l'inégalité de Biemaymé-Tchebytchev, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - m_S| \geq \epsilon) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2\epsilon^2}.$$

Quand $n \to \infty$, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2}$ *tend vers 0. Par conséquent* $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2\epsilon^2} \to 0$. *On obtient* $\mathbb{P}(|S_n - m_S| \geq \epsilon) = 0$. *Donc* S_n *converge en probabilité vers* m_S

Remarque 7.3 *On peut généraliser la loi faible des grands nombres au cas ou les variables aléatoires sont dépendantes. On doit cette généralisation à Markov.*

Théorème 14 *(Markov). Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires dépendantes d'espérances*

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ finies. Si

$$\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0, \ quand\ n \to \infty;$$

alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to m_S \ en\ probabilit\acute{e}.$$

où $m_S = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Démonstration 7.3

$$V(S_n) = V(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - m_S| \geq \epsilon) \leq \frac{V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)}{n^2\epsilon^2}.$$

Quand $n \to \infty$, $\frac{1}{n^2}V\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$ tend vers 0. Par conséquent, $\frac{V(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)}{n^2\epsilon^2}$ tend aussi vers 0. On obtient $\mathbb{P}(|S_n - m_S| \geq \epsilon) = 0$. Donc S_n converge en probabilité vers m_S.

7.6.2 Loi forte des grands nombres

Théorème 15 *(Kolmogorov). Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, d'espérances mathématiques $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ finies et de variances $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2, \ldots$ finies. Si*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty;$$

alors

$$S_n = \frac{1}{n}X_i \to m_S \ \ presque\ s\hat{u}rement,$$

où $m_S = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

La version la plus utilisée de la loi forte des grands nombres est donnée par le théorème suivant.

Théorème 16 *(Kolmogorov). Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi ayant une espérance mathématique m finie. Alors,*

$$S_n = \frac{1}{n}X_i \to m \ \ presque\ s\hat{u}rement.$$

C'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = m\right) = 1.$$

7.7 Théorème central limite

Le théorème de la limite centrale (TLC) est un théorème fondamental, non seulement en calcul des probabilités mais également en statistique mathématique, il affirme grosso modo qu'une somme finie de variables aléatoires indépendantes, centrées, de même loi et de variance finie, se comporte en loi (lorsqu'elle est bien normalisée et lorsque n devient très grand) comme une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Ainsi on a pas besoin de connaître la loi des variables aléatoires considérées.

Théorème 17 *Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi, ayant une espérance m et une variance σ^2. Soit*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ et\ Y_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}};$$

alors Y_n converge en loi vers une variable normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque 7.4 *Il faut bien noter qu'on n'exige aucune information sur la loi des variables aléatoires considérées.*

7.8 Exercices

Exercice 7.1 *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies par :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - p^n, \\ \mathbb{P}(X_n = -1) = p^n. \end{cases}$$

Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. *Calculer $E(S_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} E(S_n)$.*
2. *Montrer que S_n converge en probabilité.*

Exercice 7.2 *La probabilité qu'une pièce de monnaie montre pile lors d'un lancer est $p \in]0,1[$. On lance cette pièce n fois et on note respectivement P_n et F_n le nombre de piles et de faces obtenu lors de ces lancers qu'on suppose indépendants.*

1. *Quelle est la loi de la variable aléatoire $P_n + F_n$?*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(\frac{1}{1+P_n}) = \frac{1-(1-P)^{n+1}}{(n+1)p}$$

Exercice 7.3 *Soient* $(U_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0, 1]. On pose pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(\prod_{i=1}^{n} U_i)^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$$

1. *Étudier la convergence en loi de* $Z_n = \ln(Y_n)$.

2. *Étudier la convergence en loi de* Y_n.

Exercice 7.4 *Soit* (X_n) *une suite de v.a. dont la loi est définie pour* $n \in \mathbb{N}$ *par :*

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}n,\ n \neq 0.$$

1. *Montrer que* (X_n) *converge en probabilité, mais pas en moyenne quadratique, vers zéro quand* n *tend vers l'infini.*

2. *Soit* (Y_n) *une suite de v.a. de même loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *et indépendantes des v.a.* (X_n).
   Étudier la convergence en loi de $Z_n = X_n + Y_n$ *et la limite de* $V(Z_n)$ *quand n tend vers l'infini.*

Bibliographie

[1] Michel Barbe, Philippe et Ledoux. *Probabilité (L3M1)*. EDP Sciences, 2012.

[2] Philippe et Ronchetti Elvezio Cantoni, Eva et Huber. Maîtriser l'aléatoire exercices résolus de probabilités et statistique. 2009.

[3] Jean-François Delmas. *Introduction au calcul des probabilites et a la statistique : exercices, problemes et corrections (2e édition)*. Les Presses de l'ENSTA, 2013.

[4] Myriam et Bertrand Frédéric Fredon, Daniel et Maumy-Bertrand. *Mathématiques L1/L2 : Statistique et Probabilités : en 30 fiches*. Dunod, 2009.

[5] Catherine Goldfarb, Bernard et Pardoux. *Introduction à la méthode statistique : manuel et exercices corrigés*. Dunod, 2011.

[6] Denis Haccoun, Robert et Cousineau. *Statistiques : Concepts et applications*. PUM, 2007.

[7] Jean-pierre Lecoutre. Statistique et probabilités. 2019.

[8] Gilbert Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.

[9] ADJABI Smail. Introduction au calcul des probabilités. *Editions LaMOS, Université de Béjaia*, 1997.

[10] Renée Veysseyre. Aide-mémoire statistique et probabilités pour l'ingénieur, dunod, 2006. *Détection CFCAR en Milieux Non-Gaussiens Corrélés*.