Résumé de cinématique

La cinématique est la branche de la mécanique qui décrit le mouvement d'un corps, c'est-à-dire la modification apparente de sa position avec le temps, en ignorant les agents qui en sont la cause. La plupart des corps étudiés par les physiciens sont en mouvement. Le mouvement apparaît à toutes les échelles de l'univers, depuis les particules tels que les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes, jusqu'aux galaxies. Il est essentiel de bien définir le mouvement pour pouvoir comprendre beaucoup de phénomènes que nous observons autour de nous.

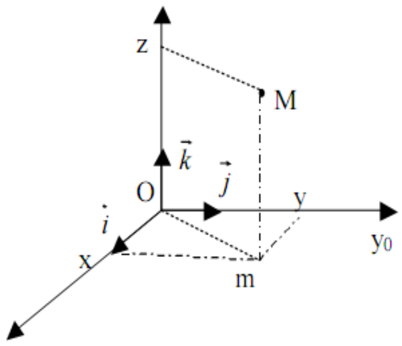
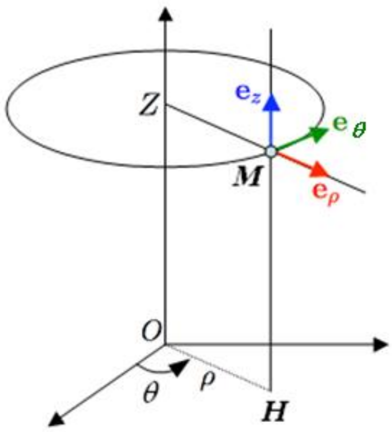
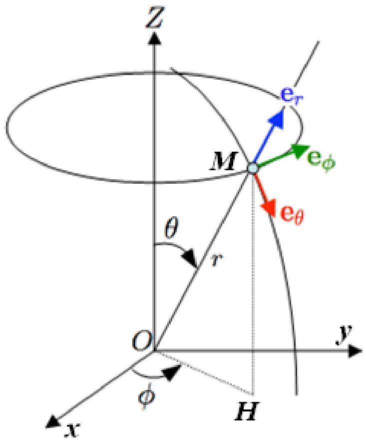
Un corps peut avoir un mouvement :

- de translation : mouvement d'une voiture sur une route ;
- de rotation : celle de la terre sur elle-même ;
- de vibration : petites oscillations d'un système masse-ressort ;
- combinant plusieurs de ces mouvements.

Mais dans un premier temps, chaque objet étudié sera ramené a un point. Ceci suppose que l'objet est rigide et non déformable et que toute la masse est concentrée au centre de gravité de celui-ci. On parle alors de '**point matériel**' de masse m. Cet objet se déplace dans l'espace au cours du temps, les positions successives qu'il occupe correspond a sa **trajectoire** : il possède une vitesse, une accélération. Néanmoins, cette notion de vitesse ou d'accélération est toute relative. Par exemple, un observateur A immobile voit un arbre dans une position fixe alors que le conducteur B d'une voiture roulant à proximité le voit en mouvement vers l'arrière. Cette notion de relativité du mouvement nous conduira à définir des référentiels et d'étudier les lois de composition des vitesses et accélérations pour passer d'un référentiel à l'autre.

1. Systèmes de coordonnées

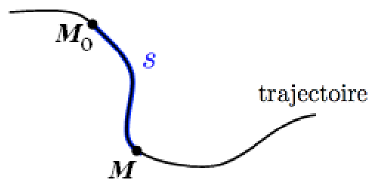
L'espace contient 3 dimensions ; cela signifie qu'il faut 3 coordonnées pour définir la position d'un point *M* dans l'espace. La première étape consiste à choisir un point qui servira de référence : c'est le **point origine** noté *O*. pour des raisons pratiques, il est important de choisir par la suite une **base *orthonormée directe*** $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
		
x = abscisse; *y* = ordonnée; *z* = côte	ρ : rayon polaire, $0 < \rho < +\infty$ θ : angle polaire, $0 < \theta < 2\pi$ *z* : côte, $-\infty < z < +\infty$	*r* : rayon $0 < r < +\infty$, θ : latitude, $0 < \theta < \pi$; ϕ : longitude, $0 < \phi < 2\pi$
Correspondance entre les coordonnées	$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$
Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$	$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$
Vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$	$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$ $+\frac{dz}{dt}\vec{e_z}$	$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ $+ r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$
Vecteur accélération $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$	$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho}$ $+(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$	$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_r}$ $+(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_\theta}$ $+(2r\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} + 2\,\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi}$ $+ r\sin\theta\ddot{\varphi})\,\vec{e_\varphi}$

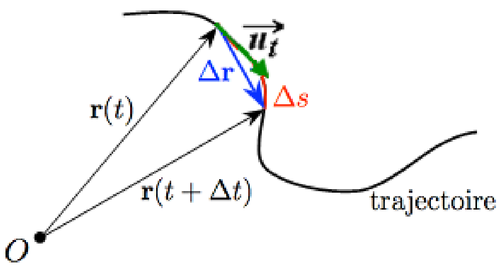
2. Définition intrinsèque du mouvement

a) Abscisse curviligne

Choisissons un point fixe M_0 sur la trajectoire qui servira de référence pour mesurer les longueurs d'arcs. On appelle abscisse curviligne s la mesure de la distance parcourue le long de la trajectoire, soit $s(t) = \widehat{M_0 M}$



b) Vecteur vitesse



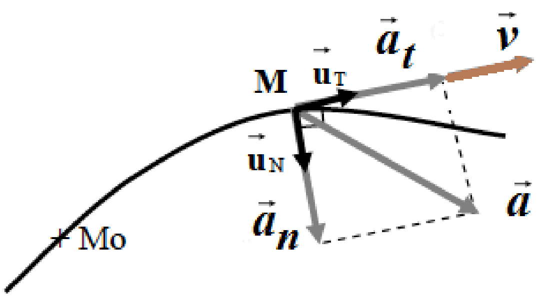
On défini un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ tangent à la courbe au point M orienté dans le sens du mouvement

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{u_t} \Longrightarrow \vec{v}(t) = v\,\overrightarrow{u_t}$$

On déduit donc que le vecteur vitesse reste toujours tangent à la trajectoire. Il est toujours orienté dans le sens du mouvement.

c) Accélérations tangentielle et normale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\overrightarrow{u_t}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$



Le premier terme est un vecteur tangent à la trajectoire,

on l'appelle *accélération tangentielle*

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} = a_t\,\overrightarrow{u_t}$$

Elle indique la manière dont varie la grandeur (module) de la vitesse au cours du temps.

Le second terme détermine la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps. On l'appelle accélération normale noté $\overrightarrow{a_n}$

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\,\frac{d\phi}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v^2\,\frac{1}{R}\,\overrightarrow{u_n} \Longrightarrow \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$

En résumé, l'accélération d'un mobile peut toujours être décomposée en deux accélérations, l'une est dite tangentielle et l'autre normale

$$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n} \qquad soit \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$$

3. Deux cas particuliers de mouvement

<table>
<tr><th>mouvement rectiligne (MR)</th><th>Mouvement circulaire (MC)</th></tr>
<tr><td>Uniforme (MRU)
✓ trajectoire rectiligne
✓ vitesse constante (v = cste).
✓ accélération nulle (a = 0).</td><td>Uniforme (MCU)
✓ la trajectoire circulaire
✓ vitesse linéaire et angulaire ω sont des constantes.
Attention l'accélération totale n'est pas nulle</td></tr>
<tr><td>Equations du mouvement :
Espace parcouru :
$x - x_0 = v(t - t_0)$</td><td>Equations du mouvement :
Espace parcouru : $s - s_0 = v(t - t_0)$
Angle balayé : $\theta - \theta_o = \omega\,(t - t_0)$
la période : $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$
accélération : $\overrightarrow{a_t} = \vec{0}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = v^2/R\,\overrightarrow{u_n}$</td></tr>
<tr><td>Uniformément Varier (MRUV)
✓ trajectoire rectiligne ;
✓ accélération constante et non nulle.
$(a = a_0 = cste)$</td><td>Uniformément Varier (MCUV)
✓ trajectoire circulaire
✓ accélération angulaire constante
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cste$$</td></tr>
<tr><td>Equations du mouvement :
$v - v_0 = a_0(t - t_0)$
$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}\,a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$
$v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$</td><td>Equations du mouvement :
$\omega - \omega_o = \alpha\,(t - t_0)$
$\theta - \theta_o = \frac{1}{2}\alpha\,(t - t_0)^2 + \omega_o(t - t_0)$
$\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_o)$
$\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n}$</td></tr>
</table>

4. Mouvement relatifs

On utilise les définitions suivantes :

- le trièdre *Oxyz* (repère *R*) est le repère *absolu* ou référentiel *absolu* ;
- le trièdre *O'x'y'z'* (repère *R'*) est le repère *relatif* ou référentiel *relatif* ;
- le mouvement du point *M* par rapport à « *R* » s'appelle <u>*mouvement absolu*</u> ;
- le mouvement du point *M* par rapport à « *R'* » s'appelle <u>*mouvement relatif*</u> ;
- le mouvement de « *R'* » par rapport à « *R* » s'appelle <u>*mouvement d'entraînement*</u> ;

a) Relation entre les vitesses

$$\overrightarrow{v_a} = \underbrace{\left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right]}_{\overrightarrow{v_e}} + \underbrace{\left[\frac{dx'}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}\right]}_{\overrightarrow{v_r}}$$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

$\overrightarrow{v_a}$: vitesse de *M* par rapport à « *R* »

$\overrightarrow{v_r}$: vitesse de *M* par rapport à « *R'* »

$\overrightarrow{v_e}$ est appelé vitesse d'entrainement de *R'* par rapport à *R*

Le mouvement de *R'* peut être décomposé en une translation de *O'* par rapport à *O* et une rotation des trois axes *x'y'z'* par rapport à *R*. On définie alors $\vec{\omega}$: vecteur vitesse de rotation, il correspond à la rotation des axes de *R'* par rapport à *R*. Attention $\vec{\omega}$ ne correspond pas à la rotation de *O'* dans *R*. On peut écrire la vitesse relative sous la forme :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{v_e} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{translation} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{rotation}$$

b) Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x}'\,\vec{i} + \ddot{y}'\,\vec{j} + \ddot{z}'\,\vec{k}\,)}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d'entrainement.

$\overrightarrow{a_c}$: Accélération complémentaire ou accélération de coriolis.

$\overrightarrow{a_a}$: Accélération absolue.

$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative.

On peut écrire l'accélération de coriolis sous la forme : $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$

Pour l'accélération d'entrainement on écrit : $\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{(2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r})}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x}'\,\vec{i} + \ddot{y}'\,\vec{j} + \ddot{z}'\,\vec{k}\,)}_{\overrightarrow{a_r}}$$