Série de TD n°3 : Dynamique du point matériel

Exercice 1 :

Un point matériel M de masse m se meut sous l'action d'une force $\vec{F}$, telle que :

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$$

Où $\vec{F}_0$ est un vecteur constant et ω une constante positive.

Déterminer les vecteurs accélération, vitesse, position et quantité de mouvement de M à un instant t, sachant que $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$.

Exercice 2 :

Une bille est lancée depuis le sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Le vecteur vitesse forme avec l'horizontal un angle α. On néglige tout frottement. L'origine O du repère adéquat (OXY) correspond à la position initiale de la bille.

1. Donner les composante de $\vec{v}_0$ dans le repère (OXY) ;
2. Quelles sont les différentes forces agissant sur la bille ;
3. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliquée à la bille ;
4. A partir de la projection de cette équation suivant les axes du repère (OXY), donner les expression des composantes de l'accélération a_x et a_y de la bille ;
5. En prenant compte des conditions initiales, déduire les composantes de la vitesse v_x et v_y de la bille ;
6. Déduire les équation horaires x et y de la bille ;
7. Déterminer l'équation de la trajectoire de la bille. Quelle est la nature de cette trajectoire ?
8. Exprimer y_{max} l'altitude maximale en fonction de α ;
9. La portée du tir correspond à l'abscisse x_{max} de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol. Exprimer cette portée en fonction de α ;
10. Que deviennent les équations du mouvement de la bille, exprimées en fonction de la vitesse lorsqu'elle est soumise à la résistance de l'air, modélisée par une forces de force de frottement fluide de forme $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k est une constante positive.

Exercice 3 :

La trajectoire de la terre autour du soleil est à peu près un cercle de rayon $r = 149500000\ km$. Sachant que la terre met une année pour effectuer une révolution, calculez la masse du soleil.

Exercice 4 :

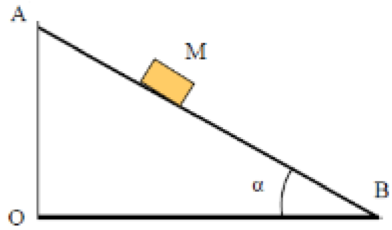
Un flocon de neige assimilé à un point matériel de masse m, tombe verticalement sans vitesse initiale. Il est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v, de la forme : $\vec{f} = -km\vec{v}$, où k est une constante positive.

1. Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le flocon.
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique.
3. En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation différentielle scalaire du mouvement.

4. En tenant compte des conditions initiales, établir $v(t)$ la loi de vitesse du flocon en fonction du temps ;
5. Déterminer v_{lim}, la vitesse limite du flocon en fonction de k et g.

Exercice 5 :

Un paquet de masse $m = 10\ kg$, supposé comme un point matériel, glisse sans vitesse initiale à partir du point A sur un plan incliné de hauteur $OA = h = 4m$ et de base $OB = h$ (voir figure ci-contre). Les frottements entre les surfaces en contact sont caractérisés par un coefficient cinétique $\mu_c = 0.5$. On prend $g = 9.81\ m.s^{-2}$.



1. Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le paquet ;
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique ;
3. Projeter cette équation vectorielle selon les deux axes X et Y (qu'il faut définir), pour trouver les deux équations scalaires qui régissent le mouvement du paquet ;
4. En déduire les expressions de la force de frottement et de la force normale (réaction) en fonction de m, g, μ_c et α ;
5. Trouver l'expression de l'accélération a du paquet. Quelle est la nature de son mouvement ? En déduire celle de sa vitesse $v(t)$;
6. Donner l'équation horaire $x(t)$ du paquet ;
7. Quel est le temps nécessaire au paquet pour qu'il atteigne le point B ?

Corrigé

Exercice 1 :

L'expression de la force :

$$\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$$

Le vecteurs accélération. D'après le PFD :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_0}{m}\sin(\omega t)$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{C}_1 = -\frac{\vec{F}_0}{m\omega}\cos(\omega t) + \vec{C}_1$$

Condition initiale :

$$\vec{v}(t=0) = \vec{0} = -\frac{\vec{F}_0}{m\omega} + \vec{C}_1 \Rightarrow \vec{C}_1 = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}$$

$$\vec{v}(t) = -\frac{\vec{F}_0}{m\omega}\cos(\omega t) + \frac{\vec{F}_0}{m\omega} = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}(1 - \cos(\omega t))$$

Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C}_2 = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right) + \vec{C}_2$$

Condition initiale :

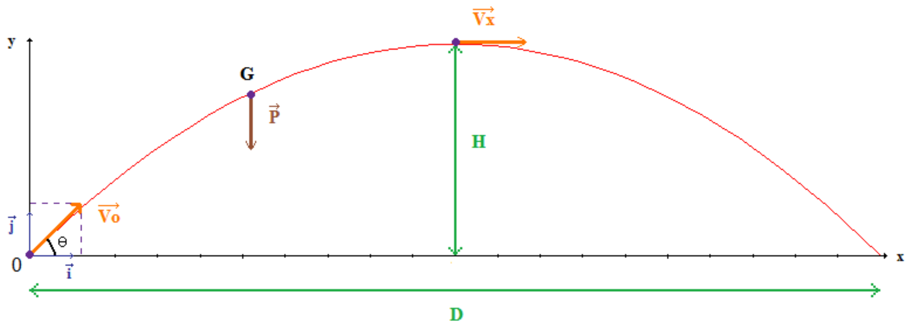
$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{C}_2$$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{\vec{F}_0}{m\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

La quantité de mouvement :

$$\vec{P}(t) = m\vec{v}(t) = \frac{\vec{F}_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$$

Exercice 2 :



1. les composante de $\vec{v}_0$ dans le repère (OXY) :

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

2. Les différentes forces agissant sur la bille :

Il y a une seule force : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

3. Le principe fondamental de la dynamique appliquée à la bille :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

4. Les expression des composantes de l'accélération a_x et a_y de la bille :

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

5. Les composantes de la vitesse v_x et v_y de la bille :

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{C} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \int a_x dt + C_1 = C_1 \\ v_y = \int a_y dt + C_2 = -gt + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(t=0) = v_{0y} = v_0 \sin\alpha = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

6. Les équation horaires x et y de la bille :

$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{v}dt + \vec{C} \Rightarrow \begin{cases} x = \int v_x dt + C_3 = v_0 \cos\alpha\, t + C_3 \\ y = \int v_y dt + C_4 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 = C_3 \\ y(t=0) = 0 = C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

7. L'équation de la trajectoire de la bille et sa nature :

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$$

La trajectoire est une parabole.

8. L'altitude maximale y_{max} en fonction de α :

L'attitude maximale est atteinte lorsque $v_y = 0$, ce ceci est vrai à la date :

$$t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

En introduisant cette expression dans $y(t)$, il vient que :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

9. La portée en fonction de α :

La portée est l'abscisse x_p du point P, dont l'ordonnée y_p est nulle. C'est le point du sol sur lequel arrive le projectile après sa chute. Ceci conduit à résoudre l'équation :

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x + (\tan\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

10. Les équations du mouvement de la bille lorsqu'elle est soumise à la résistance de l'air :

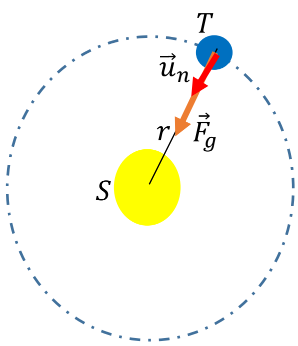
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} (OX) : \frac{dv_x}{dt} + \frac{k}{m}v_x = 0 \\ (OY) : \frac{dv_y}{dt} + \frac{k}{m}v_y = -g \end{cases}$$

<u>Exercice 3 :</u>

La terre est soumise à la force gravitationnelle exercée par le soleil. D'après le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{a}$$



Projection dans la base intrinsèque $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$:

$$G\frac{M_T M_s}{r^2}\vec{u}_n = M_T\vec{a}_n = M_T a_n \vec{u}_n$$

La projection suivant l'axe normal $(\vec{u}_n)$, donne :

$$G\frac{M_s}{r^2} = a_n$$

Où M_T, M_s et a_n sont la masse de la terre, la masse du soleil et l'accélération normale. Sachant que :

$$a_n = \frac{v^2}{r}\ ;\ v = \omega r = \frac{2\pi}{T}r \Rightarrow a_n = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Où et la vitesse angulaire de la terre et la période de sa révolution autour du soleil. Il s'en suit que :

$$G\frac{M_s}{r^2} = a_n \Rightarrow G\frac{M_s}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Ce qui nous donne finalement l'expression de la masse du soleil :

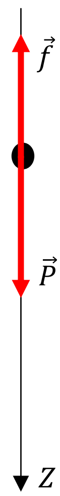
$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Application numérique :

$$r = 149500000\ km = 1495\ 10^{8} m, G = 6.67\ 10^{-11} SI, T = 365 \text{ jours} = 31536000\ s$$

$$M_S = 1.99\ 10^{30} kg$$

<u>Exercice 4 :</u>



Les différentes forces agissant sur le flocon :

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Les forces de frottements fluide : $\vec{f} = -km\vec{v}$

Le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - km\vec{v} = m\vec{a}$$

Projection selon l'axe de la chute (OZ) :

$$mg - kmv = ma$$

L'équation différentielle scalaire du mouvement :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - kmv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + kv = g$$

La loi de vitesse du flocon en fonction du temps :

$$\frac{dv}{dt} + kv = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv + g = -k\left(v - \frac{g}{k}\right) \Rightarrow \frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -kdt$$

$$\int \frac{dv}{v - \frac{g}{k}} = -\int kdt \Rightarrow \ln\left(v - \frac{g}{k}\right) = -kt + C \Rightarrow v - \frac{g}{k} = e^{-kt+C} = Ae^{-kt}\ (A = e^{C})$$

$$v(t) = Ae^{-kt} + \frac{g}{k}$$

Condition initiale :

$$v(t=0) = 0 = A + \frac{g}{k} \Rightarrow A = -\frac{g}{k}$$

$$v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Déterminer la vitesse limite v_{lim} du flocon :

$$v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{g}{k}$$

<u>Exercice 5 :</u>

1. Représenter et écrire les différentes forces agissant sur le paquet :

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

La réaction du plan incliné (force normale) : $\vec{R}$

Les forces de frottements cinétiques : $\vec{f_c} = -\mu_c\vec{R}$

2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_c} = m\vec{a}$$

3. Projeter cette équation vectorielle selon les deux axes X et Y, pour trouver les deux équations scalaires qui régissent le mouvement du paquet :

L'axe (OX) est parallèle au plan et l'axe (OY) lui est perpendiculaire.

$$\begin{cases}(OX):\ P_x - f_c = ma_x \\ (OY): R - P_y = ma_y\end{cases}$$

4. En déduire les expressions de la force de frottement et de la force normale (réaction) en fonction de m, g, μ_c et α :

Le mouvement s'effectue suivant l'axe (OX), par conséquent : $a_y = 0$; $a_x = a$

$$(OY): R - P_y = ma_y = 0 \Rightarrow R = P_y = mg\cos\alpha$$

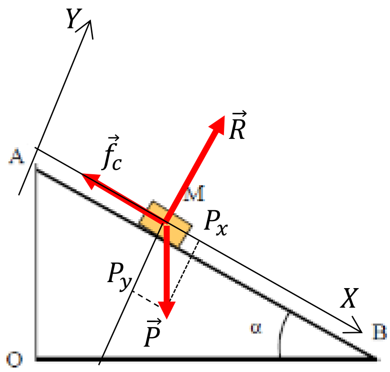
$$f_c = \mu_c R = \mu_c mg\cos\alpha$$

5. L'expression de l'accélération a du paquet :

$$(OX):\ P_x - f_c = ma \Rightarrow a = \frac{P_x - f_c}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_c mg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)$$

La trajectoire et l'accélération est constante et positive, par conséquent, le mouvement du paquet est rectiligne uniformément accéléré.

En déduire celle de sa vitesse $v(t)$:



$$v(t) = at + v_0$$

Condition initiale : $v(t=0) = 0 = v_0$

Par conséquent :

$$v(t) = g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t$$

6. Donner l'équation horaire $x(t)$ du paquet :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

On prend le point comme origine des distances :

$$x(t=0) = x_A = 0 = x_0$$

Par conséquent :

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t^2$$

7. Le temps nécessaire au paquet pour qu'il atteigne le point B ?

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}h$$

$$AB = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)t_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \frac{2AB}{g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}h}{g(\sin\alpha - \mu_c\cos\alpha)}$$

<u>Applications numériques :</u>

$$h = 4m\ ;\ \cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (\alpha = 45°)\ ;\ g = 9.81\ m.s^{-2}\ ;\ \mu_c = 0.5$$