Chapitre 2 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

George Boole

Corrigé de la Série TD2

Séance de TD4 (Semaine du 1 au 7 mai 2016)

Lors de cette séance les chargés de TD doivent remettre aux étudiants un QCM à rendre dans 2 semaines.

Exo1 – Citez tous les axiomes de l'algèbre de Boole
Réponse : 6 axiomes pour chacune des loi « . » et « + » : Commutativité, associativité, élément neutre, distributivité, idempotence et complémentarité.

Exo2 – Que veut-on dire par fonction involutive ?
Réponse : Une fonction involutive est une fonction qui donne l'identité lorsqu'elle est appliquée deux fois : f(fx))=x.

Exo3 – Démontrer la propriété : « x + x + x = x ».
(Indiquez quelle est l'axiome que vous utilisez).
Réponse :
Associativité donne : x+x+x = (x+x)+x
Idempotence donne : (x+x)+x = x+x
Idempotence donne : x+x = x
D'où x+x+x = x

Exo4 – Démontrer la propriété : « $x + x + \bar{x} = 1$ ». (Indiquez, pour chaque étape quelle est la propriété que vous utilisez).
Réponse :
Idempotence donne : $\boldsymbol{x + x + \bar{x} = x + \bar{x}}$
Complémentarité donne : $\boldsymbol{x + \bar{x} = 1}$
D'où : $\boldsymbol{x + x + \bar{x} = 1}$

Exo5 – Démontrer la propriété : « $x + 1 = 1$ ». (Indiquez, pour chaque étape quelle est l'axiome que vous utilisez).
Réponse :

$\boldsymbol{x + 1 = x + (x + \bar{x})}$	**Complémentarité**
$\boldsymbol{= (x + x) + \bar{x}}$	**Associativité**
$\boldsymbol{= x + \bar{x}}$	**Idempotence**
$\boldsymbol{= 1}$	**Complémentarité**

Exo6 – Démontrer la propriété : « $x \,.\, 0 = 0$ ». (Indiquez, pour chaque étape quelle est l'axiome que vous utilisez).
Réponse :

$\boldsymbol{x.0 = x.(x.\bar{x})}$	**Complémentarité**
$\boldsymbol{= (x.x).\bar{x}}$	**Associativité**
$\boldsymbol{= x.\bar{x}}$	**Idempotence**
$\boldsymbol{= 0}$	**Complémentarité**

Exo7 – L'ensemble V={0,1} muni des lois « . » et « + » et de la fonction involutive négation (ou inversion logique $f(x) = \bar{x}$) est une algèbre de Boole.

- Q1 : Est-ce que l'opérateur « . » est le produit arithmétique ? Sinon, indiquez comment on l'appel ?
  Réponse : **Non « . » est un produit logique qui est appelé opérateur « ET ».**

- Q2 : Est-ce que l'opérateur « + » est la somme arithmétique ? Sinon, indiquez comment on l'appel ?
  Réponse : **Non « + » est une somme logique qui est appelé opérateur « OU ».**

- En vous servant d'une table de vérité, indiquez les valeurs de *x+y* et *x.y* et de $\bar{x}$

x	y	x . y	x + y	$\bar{x}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Exo8 – Soient *x* et *y* deux variables booléennes
$(x,y) \in V^2$ où V={0,1}
On définit l'opérateur $\oplus$ de la manière suivante :
$x \oplus y = 1$ si et seulement si $x \neq y$
Montrez, à l'aide d'une table de vérité que

$$x \oplus y = \bar{x}.y + x.\bar{y}$$

On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante :
$x \overline{\oplus} y = 1$ si et seulement si $x = y$
Montrez, à l'aide d'une table de vérité que

$$x \overline{\oplus} y = \overline{x \oplus y}$$

x	y	$x \oplus y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y} + \bar{x}y$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Égalité

x	y	$x \oplus y$	$x \overline{\oplus} y$	$\overline{x \oplus y}$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

Égalité

Séance de TD5 (Semaine du 8 au 14 mai 2016)

Exo9 – Trouvez le complément de : $A + \bar{B} . C$

<u>Indication</u> **:** le résultat doit être composé uniquement de Mintermes

$\overline{A + \bar{B} . C} = \bar{A}.\left(\overline{\bar{B}.C}\right)$	DeMorgan
$= \bar{A}.(B + \bar{C})$	DeMorgan
$= \bar{A}.B + \bar{A}.\bar{C}$	Distributivité
$= \bar{A}.B.(1) + \bar{A}.\bar{C}.(1)$	Elément neutre
$= \bar{A}.B.(C + \bar{C}) + \bar{A}.\bar{C}.(B + \bar{B})$	Complémentarité
$= \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{C}.B + \bar{A}.\bar{C}.\bar{B}$	Distributivité
$= \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	Commutativité
$= \bar{A}.B.C + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$	Idempotence

Remarque : **On appelle *Minterme* (ou fonction unité) de n variables un produit logique de n variables ou leurs compléments. Dans l'exemple de cet exercice, nous avons 3 variables, le résultat attendu doit être donc composé d'un produit ou d'une somme de produits à 3 variables.**

Exo10 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **{*O₁*, *O₂*, … *Oₙ*}** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

Réponse : **Un ensemble d'opérateurs permettant d'exprimer toutes les fonctions logiques est appelée système logique complet. Par exemple, nous avons vu que « . », « + » et « NON » constitue un système logique complet.**

Exo11 – La loi de ***De Morgan*** stipule que la négation d'une somme logique est égale au produit des négations et la négation d'un produit logique est égale à la somme des négations.

- Appliquez cette loi sur 2 variables x_1 et x_2.
- Appliquez cette loi sur 3 variables x_1, x_2 et x_3.
- Appliquez cette loi sur ***n*** variables x_1, x_2, …, x_n.
- En vous servant d'une table de vérité, démontrer cette loi pour 2 variables x_1 et x_2.

Réponse :

Pour deux variables : $\overline{x_1 . x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

Pour 3 variables : $\overline{x_1 . x_2 . x_3} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}$

Pour n variables : $\overline{x_1 . x_2 \ldots\ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots \overline{x_n}$

x_1	x_2	$x_1 . x_2$	$\overline{x_1 . x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} + \overline{x_2}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Égalité

Exo12 – Montrer comment l'opérateur « **ET** » peut être obtenu à partir des opérateurs « **OU** » et « **NON** ». De même pour l'opérateur « **OU** » avec les opérateurs « **ET** » et « **NON** ». Je précise que « ET » est noté « . », « OU » est noté « + » et « NON(x) » par $\bar{x}$.

Que déduisez-vous à propos de l'ensemble {ET, NON} et de l'ensemble {OU, NON}

Réponse : En appliquant le théorème de DeMorgan :

$$x.y = \overline{\overline{x.y}}$$
$$x.y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$

$$x + y = \overline{\overline{x + y}}$$
$$x + y = \overline{\bar{x} . \bar{y}}$$

Exo13 – Soi $f(x, y, z) = \bar{x}.y + y.z$ t

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $x \uparrow y = \overline{x.y}$

Réponse :

Transformations algébriques	
$f(x,y,z) = \bar{x}.y + y.z.t$	Expression de départ
$= \overline{\overline{\bar{x}.y + y.z.t}}$	Involution ($a = \bar{\bar{a}}$)
$= \overline{\overline{(\bar{x}.y)} . \overline{(y.z.t)}}$	DeMorgan ($\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$)
$= \overline{\overline{(\bar{x}.y)} . \overline{((y.z).t)}}$	Associativité ($y.z.t = (y.z).t$)
$= \overline{\overline{(\overline{x.x}.y)} . \overline{((y.z).t)}}$	Idempotence (x = x+x)
$= \overline{\overline{(\overline{x.x}.y)} . \overline{(\overline{\overline{y.z}}.t)}}$	Involution ($y.z = \overline{\overline{y.z}}$)
$= \overline{\left(\overline{(\overline{x.x}.y)} . \left(\overline{(\overline{(\overline{y.z}).(\overline{y.z})}).t}\right)\right)}$	Idempotence $\overline{y.z} = (\overline{y.z}).(\overline{y.z})$
$= \overline{((x \uparrow x) \uparrow y) \uparrow (((y \uparrow z) \uparrow (y \uparrow z)) \uparrow t)}$	Identifier les NAND
$= \left(((x \uparrow x) \uparrow y) \uparrow (((y \uparrow z) \uparrow (y \uparrow z)) \uparrow t)\right) \uparrow \left(((x \uparrow x) \uparrow y) \uparrow (((y \uparrow z) \uparrow (y \uparrow z)) \uparrow t)\right)$	Idempotence $\bar{a} = \overline{a.a} = a \uparrow a$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $x \downarrow y = \overline{x + y}$

Réponse :

$$f(x,y,z) = \bar{x}y + yzt$$
$$= y(\bar{x} + zt)$$
$$= \overline{\overline{y(\bar{x} + zt)}}$$
$$= \overline{\bar{y} + (\overline{\bar{x} + zt})}$$
$$= \bar{y} \downarrow (\bar{x} \downarrow (zt))$$
$$= \bar{y} \downarrow (\bar{x} \downarrow (\overline{\overline{zt}}))$$
$$= \bar{y} \downarrow (\bar{x} \downarrow (\overline{\overline{z \cdot t}}))$$
$$= \bar{y} \downarrow (\bar{x} \downarrow (\overline{\bar{z} + \bar{t}}))$$
$$= \bar{y} \downarrow (\bar{x} \downarrow (\bar{z} \downarrow \bar{t}))$$
$$= (y \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow ((z \downarrow z) \downarrow (t \downarrow t)))$$

Exo14 – Donnez la table de vérité de la fonction :

$$f(x,y,z) = \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y.z$$

Indication : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

Réponse : Trouvons la forme canonique disjonctive de $f(x,y,z)$:

Nous devons exprimer cette fonction sous forme d'une somme logique de Mintermes :

$$f(x,y,z) = \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y.z$$

$$= \bar{x}.y.(1) + x.\bar{y}.(1) + x.y.z$$

$$= \bar{x}.y.(z + \bar{z}) + x.\bar{y}.(z + \bar{z}) + x.y.z$$

$$= \bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.z$$

$$= \bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.y.z$$

$$= m_3 + m_2 + m_5 + m_4 + m_7$$

$$\boxed{= m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7}$$

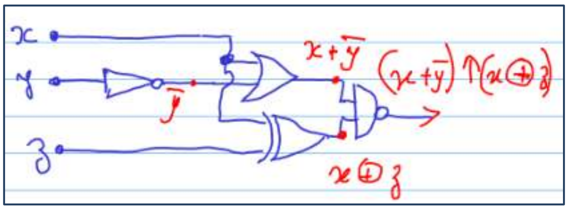
Nous déduisons directement la table de vérité sachant que les numéros des Mintermes de l'équation ci-dessus indiquent les lignes de la table de vérité pour lesquelles la fonction est à 1 :

Mintermes	xyz	F(x,y,z)
m_0	000	0
m_1	001	0
m_2	010	1
m_3	011	1
m_4	100	1
m_5	101	1
m_6	110	0
m_7	111	1

Exo15 – Donnez la forme canonique disjonctive (FCD) de la fonction $f(x,y,z) = \bar{x}.y + y.z$

Déduire sa table de vérité

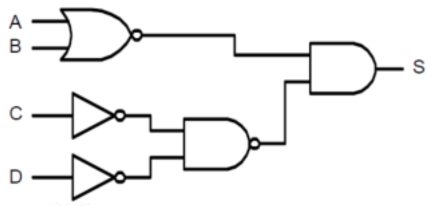
Exo16 – Donnez le logigramme de $f = (x + \bar{y}) \uparrow (x \oplus z)$

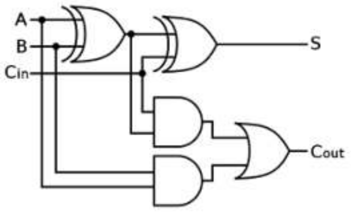


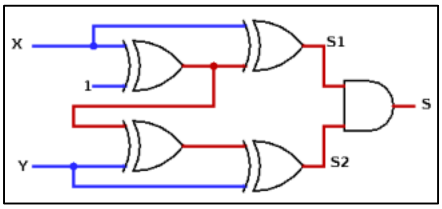
Séance de TD6 (Semaine du 15 au 21 mai 2016)

Les étudiants doivent montrer le QCM qui leur a été donné lors de la séance n°4. Une correction du QCM doit être donnée par le chargé de TD (15 minutes).

Exo17 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous







Exo18 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)* = Σ(0,2,3,7,14,15)**

Réponse :

m_i	x	y	z	t	F(x,y,z,t)
m_0	0	0	0	0	1
m_1	0	0	0	1	0
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	1
m_4	0	1	0	0	0
m_5	0	1	0	1	0
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	1
m_8	1	0	0	0	0
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	0
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	0
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1

Exo19 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

yz→ t ↓	00	01	11	10
0	x		x	
1		x		

yz→ tu ↓	00	01	11	10
00	x		x	
01		x		
11				
10				

	x							
	0				1			
yz→ tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00			x					
01								
11			x					
10		x		x			x	

	x							
	0				1			
yz→ tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00		x						
01	x		x				x	
11		x						
10								

m_i	x	y	z	t	$F(x,y,z,t)$
m_0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1	1
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	0
m_4	0	1	0	0	0
m_5	0	1	0	1	0
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	0
m_8	1	0	0	0	0
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	1
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1

Exo20 – Soit la fonction F suivante :

A - Donnez la forme canonique disjonctive de F

F(x,y,z,t) **= Σ(1,2,10,12,14,15)**

$$f(x,y,z) = \overbrace{\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t}^{m_1} + \overbrace{\bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t}}^{m_2} + \overbrace{x.\bar{y}.z.\bar{t}}^{m_{10}} + \overbrace{x.y.\bar{z}.\bar{t}}^{m_{12}} + \overbrace{x.y.z.\bar{t}}^{m_{14}} + \overbrace{x.y.z.t}^{m_{15}}$$

B – En utilisant la méthode algébrique donnez une forme simplifiée de ***F*** à base des opérateurs **ET**, **OU** et **NON**

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$
$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$
$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + (\bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + x.\bar{y}.z.\bar{t}) + (x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t}) + (x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t)$$
$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{y}.z.\bar{t}.(\bar{x} + x) + x.y.\bar{t}(\bar{z} + z) + x.y.z.(\bar{t} + t)$$

Voici une première forme simplifiée :

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{t} + x.y.z}$$

Voici une forme simplifiée encore meilleure :

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{y}.(\bar{x}.\bar{z}.t + z.\bar{t}) + x.y.(z + \bar{t})}$$

<u>Voici le bilan de la simplification</u> : Dans notre équation nous avons 5 NON, 3 OU et 6 ET. En supposant que le ET et le OU nécessitent 6 transistors chacun et le NON 2 transistors, notre fonction va nécessiter :
5 x 2 + (3+6) x 6 = 64 transistors

C – En utilisant la méthode algébrique donnez une forme simplifiée de F à base des opérateurs **ET**, **OU**, **NON** et du **OU exclusif**

Réponse :

$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{t} + x.\bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{z}.\bar{t} + x.y.z.\bar{t} + x.y.z.t$$
$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}(\bar{z}.t + z.\bar{t}) + x.\bar{t}.(\bar{y}.z + y.\bar{z}) + x.y.z.(\bar{t} + t)$$
$$f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}(z \oplus t) + x.\bar{t}.(y \oplus z) + x.y.z$$

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.(z \oplus t) + x.(\bar{t}.(y \oplus z) + y.z)}$$

<u>Voici le bilan de la simplification</u> : Dans notre équation nous avons 3 NON, 2 OU et 5 ET et 2 XOR En supposant que NXOR, le ET et le OU nécessitent 6 transistors chacun et le NON 2 transistors, notre fonction va nécessiter :
3 x 2 + (2+5+2) x 6 = 60 transistors

Notez bien : On suppose que le XOR (Ou exclusif) nécessite 6 tronsistors.

D – Utilisez la table de Karnaugh pour vérifier vos résultats (celui obtenu en question B)

zt \ x y	00	01	11	10
00			1	
01	1			
11			1	
10	1		1	1

g1 g2 g3 g4

$$g1 = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t$$
$$g2 = \bar{y}.z.\bar{t}$$
$$g3 = x.y.\bar{t}$$
$$g4 = x.y.z$$
$$f(x,y,z) = g1 + g2 + g3 + g4$$

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.t + \bar{y}.z.\bar{t} + x.y.\bar{t} + x.y.z}$$

Par factorisation, on peut encore simplifier :

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{y}.(\bar{x}.\bar{z}.t + z.\bar{t}) + x.y.(z + \bar{t})}$$

E – Dessinez le logigramme de ***F***