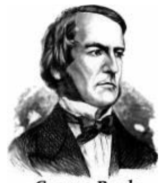
Chapitre 3 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques
Série TD3 (2019-2020 Semestre 1)


George Boole

Séance 6

Lors de cette séance, les chargés de TD doivent remettre aux étudiants le QCM2 à rendre dans 2 semaines. Ils doivent aussi organiser l'interrogation 1 d'une duré d'une heure environ.

Séance 7

Q1 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

- ☐ Idempotence
- ☐ Commutativité
- ☐ Associativité
- ☐ Eléments neutre
- ☐ Eléments symétrique
- ☐ Karnaugh
- ☐ Mc Clusky
- ☐ Complémentarité
- ☐ Absorption
- ☐ DeMorgan
- ☐ Inhibition
- ☐ Double distributivité

Q2 – Démontrer que l'idempotence n'est pas un axiome

Q3 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
x + x = x	
x + y = y + x	
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	
x + 0 = x	
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	
$\bar{x} + x = 1$	

Loi "."	Nom de la propriété
x . x = x	
x . ys = y . x	
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	
x . 1 = x	
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	
$\bar{x}.x = 0$	

Propriété	Nom de la propriété
$\overline{\sum_{i=0}^{n} x_i} = \prod_{i=0}^{n} \overline{x_i}$	

Q4 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les valeurs « 1 » par « 0 » et inversement.

☐ Vrai ☐ Faux ☐ Définition incomplète

Q5 – Indiquez à quelle propriété correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x+y+z+t} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}.\bar{t} \qquad \overline{x.z} = \bar{x}+\bar{z}$$

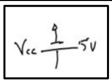
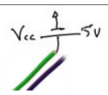
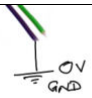
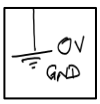
Q6 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 0V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 5V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 3V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q7 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

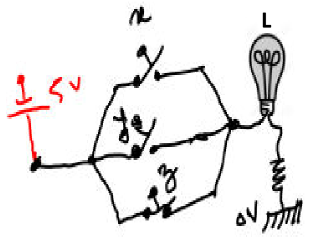
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension avoisinant 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q8 – Complétez le tableau ci-dessous :

Etat électrique	Etat logique	Etat électrique	Etat logique
			
			
			
			

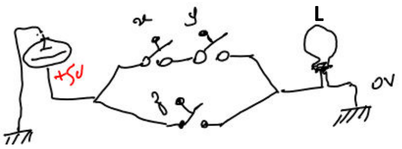
Q9 – En supposant que l'on représente 3 variables booléennes « ***x*** », « ***y*** » et « z » par 3 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



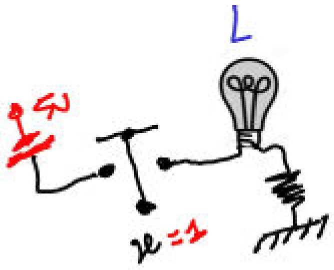
x	y	z	L

B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



x	y	z	L

Q10 – – Le schéma électrique suivant



f(*x*) = ……

Correspond à :

- ❑ La négation avec x=0 et L=1
- ❑ Le OU
- ❑ La négation avec x=1 et L=0
- ❑ Le ET
- ❑ Le OU exclusif
- ❑ Le NON OU exclusif
- ❑ Le NAND
- ❑ Le XOR

Q11 – Si vous avez ***8*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction ***F = f***(x_7, x_6, …, x_1, x_0) :

Séance 8

Q12 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz + xyz =$ $x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz + xyz$ $+xyz + xyz$	
$= x\bar{y}z + xyz + xy\bar{z} + xyz$ $+\bar{x}yz + xyz$	
$= (x\bar{y}z + xyz) + (xy\bar{z} + xyz)$ $+(\bar{x}yz + xyz)$	
$= (\bar{y} + y)xz + (\bar{z} + z)xy$ $+(\bar{x} + x)yz$	
$= (1)xz + (1)xy + (1)yz$	
$= xz + xy + yz$	
$= xy + yz + xz$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{(x+y+z).(x+\bar{y}+z)}$ $= \overline{(x+y+z)} + \overline{(x+\bar{y}+z)}$	
$= (\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}) + (\bar{x}.y.\bar{z})$	
$= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z}$	
$= (\bar{y} + y)\bar{x}.\bar{z}$	
$= (1)\bar{x}.\bar{z}$	
$= \bar{x}.\bar{z}$	

Indique le nom de l'opérateur issue des formules suivantes :

Transformation algébrique	Opérateur
$xy + \bar{x}.\bar{y} = x \oplus y$	
$\bar{x}y + x.\bar{y} = x \overline{\oplus} y$	
$\overline{x.y} = x \uparrow y$	
$\overline{x+y} = x \downarrow y$	

Q13 – Donnez les tables de vérité des fonctions à 2 variables ***x*** et ***y*** suivantes : ET, OU, XOR (ou exclusif), NXOR (ou équivalence), NAND (Non du ET) et NOR (Non u OU)

Q14 – Démontrer la propriété suivante :

$$\overline{\prod_{i=0}^{n-1} x_i} = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{x_i}$$

Indication :

Procédez par récurrence !

Séance 9

Q15 – Démontrer la propriété : « $x.x + \overline{x} = 1$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q16 – Démontrer la propriété : « $x.x + y.\overline{y} = x$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q17 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes

(*x, y*) ∊ V² où V = {0,1}

☞ On définit l'opérateur OU EXCLUSIF noté « ⊕ » de la manière suivante : ***x⊕y = 1* si et seulement si *x≠y***

Donnez la table de vérité de cet opérateur Exprimez cet opérateur à base du ET, OU et NON

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : ***x*$\overline{\oplus}$*y = 1* si et seulement si *x=y***

Donnez la table de vérité de cet opérateur Exprimez cet opérateur à base du ET, OU et NON Exprimez cet opérateur à base du OU Exclusif

Q18 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs ***{O_1, O_2, … O_n}*** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

Q19 – Montrer que l'opérateur ET tout seul ne peut pas constituer un système logique complet.

Q20 – Montrez que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {NOR} constituent des systèmes logiques complets.

Q21 – Soit $\boldsymbol{f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y} + x.\overline{z}}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $\boldsymbol{x \uparrow y = \overline{x.y}}$
- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $\boldsymbol{x \downarrow y = \overline{x+y}}$

Q22 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$\boldsymbol{f_1(x,y,z) = x.y.z + x.\overline{z} + y.z}$$
$$\boldsymbol{f_2(x,y,z) = \overline{y.(x+\overline{y})}}$$

<u>Indication</u> : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

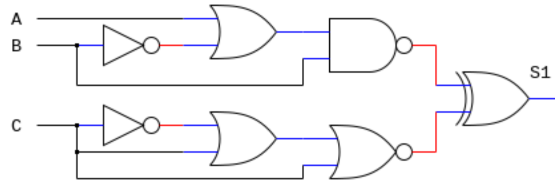
Q23 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

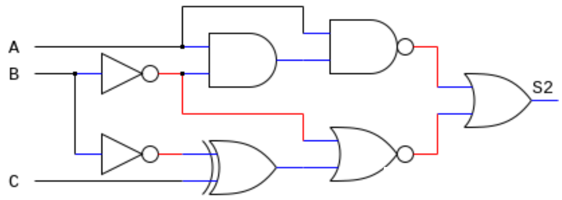
$$\boldsymbol{f_1 = (\overline{x \uparrow \overline{y}}) \uparrow (x \overline{\oplus} z) \quad \text{et} \quad f_2 = (\overline{x} + y) \uparrow (x \overline{\oplus} z)}$$

Séance 10

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q24 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous





Q25 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)* = Σ(1,2,4,9,10,13)**

Q26 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

tu ↓ \ yz→	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

tu ↓ \ yz→	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	x							
	0				1			
tu ↓ \ yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

Q27 – Simplifiez par la méthode de Karnaugh *F1 et F2* :

F1(x,y,z) = Σ(2, 4, 6, 7)

F2(x,y,z,t) = Σ(0, 2, 8, 10, 12, 13)