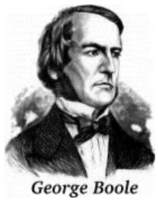
Chapitre 3 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

Série TD3 (2018-2019 Semestre 1)



Séance 6 (Semaine du 11 au 16 novembre 2018)

Lors de cette séance, les chargés de TD doivent remettre aux étudiants le QCM2 à rendre dans 2 semaines. Ils doivent aussi organiser l'interrogation 1 d'une duré d'une heure environ.

Séance 7 (Semaine du 18 au 23 novembre 2018)

Q35 – Voici les axiomes de l'algèbre de Boole

- ☐ Idempotence
- ☐ Commutativité
- ☐ Associativité
- ☐ Eléments neutre
- ☐ Eléments symétrique
- ☐ Karnaugh
- ☐ Mc Clusky
- ☐ Complémentarité
- ☐ Absorption
- ☐ DeMorgan
- ☐ Inhibition
- ☐ Double distributivité

Q36 – L'ensemble des propositions ***P*** muni des lois ***ET***, OU et négation logique est une algèbre de Boole. ☐ Vrai ☐ Faux

Q37 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
x + x = x	
x + y = y + x	
x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z	
x + 0 = x	
x + (y . z) = (x + y) . (x + z)	
$\bar{x} + x = 1$	

Loi "."	Nom de la propriété
x . x = x	
x . ys = y . x	
x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z	
x . 1 = x	
x . (y + z) = (x . y) + (x . z)	
$\bar{x}.x = 0$	

Propriété	Nom de la propriété
$\overline{\sum_{i=0}^{n} x_i} = \prod_{i=0}^{n} \overline{x_i}$	

Q38 – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . ».

☐ Vrai ☐ Faux ☐ Définition incomplète

Q39 – Indiquez à quelle propriété correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x+y+z} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \qquad \overline{x.y.z} = \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$$

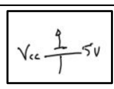
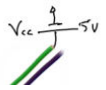
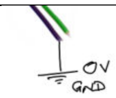
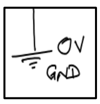
Q40 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 1 » correspond à :

- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q41 – Dans l'algèbre des circuits logiques, l'état logique « 0 » correspond à :

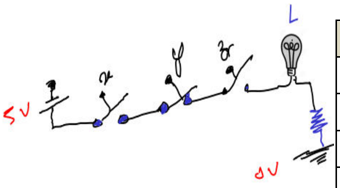
- ☐ Un niveau de tension de 220V
- ☐ Un niveau de tension de 0V
- ☐ Un niveau de tension voisine de 5V
- ☐ Une puissance électrique
- ☐ Un courant électrique
- ☐ Une lampe allumée
- ☐ Une lampe éteinte
- ☐ Un interrupteur mis sur ON
- ☐ Un interrupteur mis sur OFF

Q42 – Complétez le tableau ci-dessous :

Etat électrique	Etat logique	Etat électrique	Etat logique
			
			
			
			

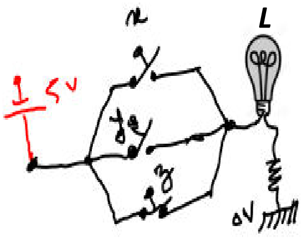
Q43 – En supposant que l'on représente 3 variables booléennes « ***x*** », « ***y*** » et « z » par 3 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe.

A ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



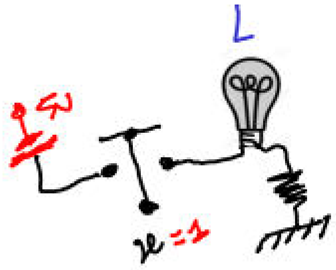
x	y	z	L

B ☞ Donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



x	y	z	L

Q44 – – Le schéma électrique suivant



f(*x*) = ……

Correspond à :

- ☐ La négation avec x=0 et L=1
- ☐ Le OU
- ☐ La négation avec x=1 et L=0
- ☐ Le ET
- ☐ Le OU exclusif
- ☐ Le NON OU exclusif

Q45 – Si vous avez ***8*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction ***F = f(x₇, x₆, …, x₁, x₀)*** : ☐

Séance 8 (Semaine : 25 au 30 novembre 2018)

Q46 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}bc + abc =$ $a\bar{b}c + ab\bar{c} + \bar{a}bc + abc$ $+abc + abc$	
$= a\bar{b}c + abc + ab\bar{c} + abc$ $+\bar{a}bc + abc$	
$= (a\bar{b}c + abc) + (ab\bar{c} + abc)$ $+(\bar{a}bc + abc)$	
$= (\bar{b} + b)ac + (\bar{c} + c)ab$ $+(\bar{a} + a)bc$	
$= (1)ac + (1)ab + (1)bc$	
$= ac + ab + bc$	
$= ab + bc + ac$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\overline{(a + b + c).(a + \bar{b} + c)}$ $= \overline{(a + b + c)} + \overline{(a + \bar{b} + c)}$	
$= (\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}) + (\bar{a}.b.\bar{c})$	
$= \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c}$	
$= (\bar{b} + b)\bar{a}.\bar{c}$	
$= (1)\bar{a}.\bar{c}$	
$= \bar{a}.\bar{c}$	

Transformation algébrique	Opérateur
$xy + \bar{x}.\bar{y} = x \oplus y$	
$\bar{x}y + x.\bar{y} = x \overline{\oplus} y$	
$\overline{x.y} = x \uparrow y$	
$\overline{x + y} = x \downarrow y$	

Q47 – Soit la table de vérité suivante

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Indiquez les fonctions correspondent aux colonnes suivantes: f_0, f_1, f_6, f_7, f_8 et f_{14}

Q48 – Démontrer la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i}$$

Indication : Procédez par récurrence !

Séance 9 (Semaine du 2 au 7 décembre 2018)

Q49 – Démontrer la propriété : « $x + \; x + \; \bar{x} \; = \; 1$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q50 – Démontrer la propriété : « $(x + x)\,.1 \; = \; x$ ». (Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q51 – Soient ***x*** et ***y*** deux variables booléennes

(*x, y*) ∈ V²   où   V = {0,1}

☞ On définit l'opérateur « ⊕ **»** de la manière suivante : ***x⊕y = 1* si et seulement si *x≠y***

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
$\boldsymbol{x \oplus y \; = \; \bar{x}.y + x.\bar{y}}$

☞ On définit l'opérateur $\overline{\oplus}$ de la manière suivante : ***x$\overline{\oplus}$y = 1* si et seulement si *x=y***

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
$\boldsymbol{x \,\overline{\oplus}\, y \; = \; \overline{x \oplus y}}$

Q52 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs **{O_1, O_2, … O_n}** de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifierez-vous cet ensemble.

Q53 – Montrer que les ensembles des opérateurs {ET, NON} et {NOR} constituent des systèmes logiques complets.

Q54 – Le OU Exclusif constitue-t-il un système complet ? Justifiez votre réponse.

Q55 – Soit $\boldsymbol{f(x,y,z) \; = \; x.y.z + y.\bar{z}}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $\boldsymbol{x \uparrow y = \overline{x.y}}$
- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $\boldsymbol{x \downarrow y = \overline{x+y}}$

Q56 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$\boldsymbol{f_1(a,b,c) \; = \; a.b + a.\bar{c} + b.c}$$
$$\boldsymbol{f_2(a,b,c) \; = \; \overline{c\,.\,(\,\bar{a} + b\,)}}$$

<u>Indication</u> : Vous devez d'abord exprimer ***f(x,y,z)*** sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

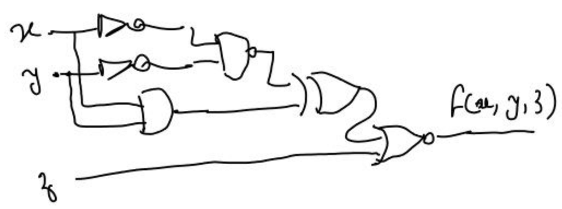
Q57 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

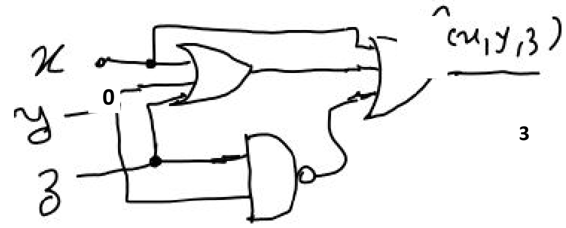
$$\boldsymbol{f_1 = (\overline{x + \bar{y}}) \uparrow (x \overline{\oplus} z)} \;\; \textbf{et} \;\; \boldsymbol{f_2 = (\bar{x} + \bar{y}) \downarrow (x \overline{\oplus} z)}$$

Séance 10 (Semaine : 9 au 13 décembre 2018)

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q58 – Donnez les équations de sorite des circuits ci-dessous





Q59 – Donnez la table de vérité de la fonction ***F*** suivante : ***F(x,y,z,t)* = Σ(0,2,4,8,11,13)**

Q60 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

yz→ / tu ↓	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

yz→ / tu ↓	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	x							
	0				1			
yz→ / tu ↓	00	01	11	10	10	11	01	00
00								
01								
11								
10								

Q61 – Simplifiez par la méthode de Karnaugh *F1 et F2* :

F1(a,b,c) = Σ(1, 5, 6, 7)

F2(a,b,c,d) = Σ(2, 5, 7, 9, 11, 13, 15)