

Examen de Maths 1. Durée 1h30.

Exercice 1. (8 points)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} - 1 \text{ est divisible par } 3.$$

2. Dans $\mathbb{R}^*$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} y \iff y(x^2 + 1) = x(y^2 + 1).$$

- (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(b) Déterminer la classe d'équivalence de 1.

Exercice 2. (6 points)

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

1. Calculer $f^{-1}(\{1\})$.
2. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner l'ensemble J , pour lequel l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow J$ soit bijective.
Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} .

Exercice 3. (6 points)

Soient α et β deux réels, et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Déterminer β pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer α et β pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Bon Courage

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice 1. (8 points)

1. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} - 1 \text{ est divisible par } 3.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}, 2^{2n} - 1 = 3k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la propriété : $\exists k \in \mathbb{Z}, 2^{2n} - 1 = 3k$.

(a) Pour $n = 0$, on a

$$2^{2 \times 0} - 1 = 0 = 3 \times 0.$$

Donc,

$$\exists k = 0 \in \mathbb{Z} : 2^{2n} - 1 = 3k.$$

D'où $P(0)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{Z}, 2^{2n} - 1 = 3k$$

et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k' \in \mathbb{Z}, 2^{2n+2} - 1 = 3k'.$$

On a

$$\begin{aligned} 2^{2n+2} - 1 &= 2^{2n} \times 2^2 - 1 \\ &= 2^{2n} \times (1 + 3) - 1 \\ &= 2^{2n} + 3 \times 2^{2n} - 1 \\ &= 2^{2n} - 1 + 3 \times 2^{2n} \\ &= 3k + 3 \times 2^{2n} \text{ (grâce à l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 3(k + 2^{2n}) \end{aligned}$$

Donc

$$\exists k' = (k + 2^{2n}) \in \mathbb{Z}, 2^{2n+2} - 1 = 3k'.$$

Finalement, on a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n} - 1 \text{ est divisible par } 3.$$

2. Dans $\mathbb{R}^*$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} y \iff y(x^2 + 1) = x(y^2 + 1).$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a

$$x(x^2 + 1) = x(x^2 + 1) \implies x \mathcal{R} x.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}$.

(ii) Symétrie de $\mathcal{R}$:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$. On a

$$x \mathcal{R} y \implies y(x^2 + 1) = x(y^2 + 1)$$

$$\implies x(y^2 + 1) = y(x^2 + 1)$$

$$\implies y \mathcal{R} x$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$. D'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$:

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies \begin{cases} y(x^2 + 1) = x(y^2 + 1) \\ \text{et} \\ z(y^2 + 1) = y(z^2 + 1) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{y^2 + 1}{y} \\ \text{et} \\ \frac{y^2 + 1}{y} = \frac{z^2 + 1}{z} \end{cases}$$

$$\implies \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{z^2 + 1}{z}$$

$$\implies z(x^2 + 1) = x(z^2 + 1)$$

$$\implies x \mathcal{R} z$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$.

D'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminons la classe d'équivalence de 1.

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{R}^* : x \mathcal{R} 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^* : 1(x^2 + 1) = x(1^2 + 1)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^* : x^2 - 2x + 1 = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^* : x = 1\}$$

$$= \{1\}$$

Exercice 2. (6 points)

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

i) Calculons $f^{-1}(\{1\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / f(x) \in \{1\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / f(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / \frac{x-2}{x-1} = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{1\} / -1 = 0\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

1,5

ii) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Injectivité de f : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1-2}{x_1-1} = \frac{x_2-2}{x_2-1} \\ &\implies (x_1-2)(x_2-1) = (x_2-2)(x_1-1) \\ &\implies x_1x_2 - x_1 - 2x_2 + 2 = x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 2 \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

1

d'où l'injectivité de f

- Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 1$ n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).
- Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

0,5

0,5

3. Donnons l'ensemble J , pour lequel l'application $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow J$ soit bijective :

Il est facile de vérifier que $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ est une bijection.

Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} - \{1\} : y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\implies y = \frac{x-2}{x-1} \\ &\implies y(x-1) = x-2 \\ &\implies x = \frac{y-2}{y-1} \end{aligned}$$

1,5

donc

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{y-2}{y-1} \end{aligned}$$

Exercice 3. (6 points)

Soient α et β deux réels, et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

– Déterminons β pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.

g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto \alpha x + \beta$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Il reste donc à étudier la continuité de g en $x = 0$. On a $g(0) = \frac{1}{1+0} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha x + \beta = \beta$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+x} \right) = 1$$

La fonction g est continue en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$. Donc g est continue en 0 $\iff \beta = 1$

Finalement, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta = 1$.

– Déterminons α et β pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de g en $x = 0$.

Si $\beta \neq 1$, on a g n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas dérivable en 0.

Donc posons $\beta = 1$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\alpha x + 1) - 1}{x} = \alpha$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1$$

$$g \text{ est dérivable en } 0 \iff \beta = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ \iff \beta = 1 \text{ et } \alpha = -1.$$

Finalement, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta = 1$ et $\alpha = -1$.