UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département Informatique
Licence 2 (RN)

EMD de S2 :

Examen de remplacement, Analyse 4
De 16h à 17h30

Exercice 1. (3pts)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $rt - s^2 = 0$ ne peut pas être un maximum pour f.
2. Si un point (a, b) est un minimum pour f alors en ce point, on a $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$.
3. L'application f est de classe C^2 si et seulement si toutes ses dérivées croisées d'ordre deux sont égales.

Exercice 2. (9pts)

1. Soit l'application f définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 3$$

   (a) Déterminer les points minimaux de f.
   (b) Vérifier que le point $(1, 0)$ n'est pas un maximum globale pour f.
   (c) Montrer que le point $(1, 0)$ n'est pas un maximum locale pour f.

2. Montrer que le fonction g définie ci-dessous admet un unique minimum global :

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$$

Exercice 3. (8pts)
Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1) \int_1^{+\infty} t^p e^{-\sqrt{t}} dt, p > 0; 2) \int_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{t}}{t - 1} dt, 3) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^p + 1} dt, p > 0; 4) \int_1^{+\infty} \frac{\cos t \sqrt{t}}{t^2} dt.$$

Bon courage

Exo.1 (3pts)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $rt - s^2 = 0$ ne peut pas être un maximum pour f.
   Faux, effectivement il peut l'être sauf qu'ici un tel extremum on ne peut pas le trouver par la formule $rt - s^2 = 0$.
2. Si un point (a, b) est un minimum pour f alors en ce point, on a $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (voir l'exo.2).
   Faux, voir l'exo.2
3. L'application f est de classe C^2 si et seulement si toutes ses dérivées croisées d'ordre deux sont égales.
   Faux, c'est une implication et pas une équivalence.

Exo.2(9pts)

1. Soit l'application f définie par
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 3$$
   (a) Déterminer les points minimaux de f.
   On a $f(x, y) = (x - y)^2 + 3 \geq 3 = f(x, x)$, donc on a une infinité de points minimaux qui sont donnés par l'ensemble $\{(x, -x), x \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Vérifier que le point $(1, 0)$ n'est pas un maximum globale pour f.
   On a $f(1, 0) = 4 < f(2, 0) = 7$.
   (c) Montrer que le point $(1, 0)$ n'est pas un maximum locale pour f.
   Il s'agit de montrer qu'il n'existe aucun ouvert sur lequel le point $(1, 0)$ est un maximum. En effet, pour $a > 0, b > 0$, soit $O =]1 - a, 1 + a[\times] - b, b[$ un ouvert contenant le point $(1, 0)$. Il est claire que le point $(1 + \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \in O$ et $f(1 + \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1 + \frac{a}{2} - \frac{b}{2})^2 + 3 > f(1, 0)$.
2. Montrer que la fonction g définie ci-dessous admet un unique minimum global :
$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$$
   Il est facile de voir que Le seul point critique est $(-1, 1)$. Remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(-1+x, 1+y) = x^2+xy+y^2+2 = (x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{2} + 2 \geq 2 = f(-1, 1)$, ce qui montre que f admet un minimum global en $(-1, 1)$.

Exo.3(8pts)
Etudier la convergence des intégrales suivantes :
1)$I = \int_1^{+\infty} t^p e^{-\sqrt{t}} dt, p > 0$; Au voisinage de l'infini, pour $p > 0$, il existe une constante $c > 0$ tel que $\forall t \geq c, t^{p+2} \leq e^{\sqrt{t}}$, ce qui implique que $\frac{t^p}{e^{\sqrt{t}}} \leq \frac{t^p}{t^{p+2}} = \frac{1}{t^2}$. Puisque $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge alors I converge.
2)$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{t}}{t - 1} dt$
Ici, on a deux points singuliers, $a = 1$ et $b = +\infty$. On a pour $t \geq e^2, \ln \sqrt{t} \geq 1$ et donc $\frac{\ln \sqrt{t}}{t - 1} \geq \frac{1}{t - 1}$ et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t - 1} dt$ diverge, alors I diverge.

3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^p+1} dt, p > 0$

Par le critère d'équivalence, I converge si et seulement si $p \geq \frac{3}{2}$

4) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t\sqrt{t}}{t^2} dt.$

Il suffit de remarquer que l'intégrale converge absolument, et donc elle est convergente.