République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique
Licence 2 (RN)

MODULE :

Analyse Mathématiques 3

L'objectif de cette UE est triple :
$*$ Découvrir quelques concepts topologiques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
$*$ Étendre les notions de limite continuité et différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et les généraliser à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.
$*$ Exploiter les résultats ci-dessus pour traiter certains problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes.

Vos remarques et commentaires sont les bienvenus sur l'adresse
< *talemdja@yahoo.com* >

Année universitaire 2020-2021

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ELÉMENTS DE TOPOLOGIE

Ce chapitre constitue une introduction à la topologie générale, une branche des mathématiques utilisée pour étudier la continuité, la différentiabilité, la convergence des suites, la compacité ...

1.1 Espace métrique

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une **distance** sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:

— $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Séparation) ;

— $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

— $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (X, d) est appelé **espace métrique**. Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X.

Exemple 1.1. 1. *Dans* $\mathbb{R}$ *l'application* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par* $d(x, y) =\mid x - y \mid$ *est une distance. En effet,*
Soient x, y *et* z *des nombres réels, on a :*

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. *Donc "d" est séparable.*

(b) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$. *Donc "d" est symétrique.*

(c) $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$. *Donc "d" vérifie l'inégalité triangulaire.*

Ainsi $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ *est un espace métrique.*

2. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *l'application* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par ;*
Pour $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$

$$d(X, Y) =\mid y_1 - x_1 \mid + |y_2 - x_2|$$

est une distance. En effet, pour $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ *et* $Z = (z_1, z_2)$

(a) $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$, *c'est à dire* $X = Y$. *D'où la séparation.*

(b) $d(X, Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = d(X, Y)$. *D'où la symétrie.*

(c) $d(X,Y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = |y_1 - z_1 + z_1 - x_1| + |y_2 - z_2 + z_2 - x_2| \leq |y_1 - z_1| + |z_1 - x_1| + |y_2 - z_2| + |z_2 - x_2| = |z_1 - x_1| + |z_2 - x_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| = d(X,Z) + d(Z,Y)$. *D'où l'inégalité triangulaire.*

Par conséquent, le couple $(\mathbb{R}^2, d)$ *est un espace métrique.*

Remarque 1.1. En général, nous avons trois distances usuelles dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, si $x = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ et $y = (y_1, y_2 \ldots y_n)$, alors les applications ci-dessous sont des distances

1. $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$;
2. $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$;
3. $d_\infty(x,y) = \max\{|y_i - x_i|, i = 1, \ldots n\}$;

Proposition 1.2. $\forall x, y, z \in X$, $\mid d(x,y) - d(x,z) \mid \leq d(y,z)$

Démonstration. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ donc $d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z)$ et $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$ et donc $-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z)$. Par conséquent, on a

$$-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z) \Rightarrow \mid d(x,y) - d(x,z) \mid \leq d(y,z)$$

□

1.2 Espace Vectoriel Normé

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. (Séparation) pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
2. (Homogénéité Positive) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. (Inégalité Triangulaire) pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé **espace vectoriel normé** qu'on notera par la suite par *e.v.n.*

La proposition suivante montre que les espaces vectoriels normés sont aussi des espaces métriques.

Proposition 1.3. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n. Alors l'application* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par* $d(x,y) = \|x - y\|$ *est une distance sur* E. *On l'appelle* ***distance induite*** *sur* E *par la norme* $\|.\|$.

Démonstration. Soit $x, y, z \in E$.

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x,y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = | - 1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x)$.
3. $d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - Y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$.

□

Remarque 1.2. Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n et "d" la distance induite par la norme de E. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, $d(0,x) = \|x\|$;
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in E^2$, $d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| d(x,y)$;

3. Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = d(x, y)$.

Exemple 1.4. *1. On peut voir facilement que la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, donc $(\mathbb{R}, |.|)$ est un e.v.n.*

*2. Désignons par $C[a,b]$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a,b]$, et pour toute fonction $f \in C[a,b]$, posons $\|f\| = sup_{[a,b]}|f(x)|$. Alors $(C[a,b], \|.\|)$ est un e.v.n. La norme ainsi définie est appelée **norme de la convergence uniforme**. En effet, Puisque f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, alors $sup_{[a,b]}|f(x)|$ existe et fini, ceci implique $\|.\|$ est une application sur $C[a,b]$.*
Essayons maintenant de vérifier les conditions de la norme.
1. On a $sup_{[a,b]}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0$, c'est à dire f est une fonction nulle. d'où la séparation.
2. Pour tout scalaire λ et pour toute fonction $f \in C[a,b]$, $\|\lambda f\| = sup_{[a,b]}|\lambda f(x)| = |\lambda| sup_{[a,b]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|$. Ceci implique l'homogénéité.
3. Enfin pour $f, g \in C[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x|$, ceci implique $sup_{[a,b]}|f(x)+g(x)| \leq sup_{[a,b]}(|f(x)| + |g(x)|) = sup_{[a,b]}|f(x)| + sup_{[a,b]}|g(x)|$, c'est à dire $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. D'où l'inégalité triangulaire.

Proposition 1.5. *Dans un e.v.n, $(E, \|.\|)$. On a :*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Voir TD □

Définition 1.3. Sur un même espace vectoriel E, plusieurs normes peuvent être définies. Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont **équivalentes** s'il existe deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in E : \alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta\|x\|'$

Proposition 1.6. *Pour $x = (x_1, x_2 ... x_n)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les trois applications $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définies par :*

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
3. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

sont des normes.

Remarque 1.3. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, puisque la dimension de l'espace $\mathbb{R}^n$ est finie, alors les trois normes données par la proposition ci-dessus sont deux à deux équivalentes.

1.3 Propriétés topologique des espaces vectoriels normés

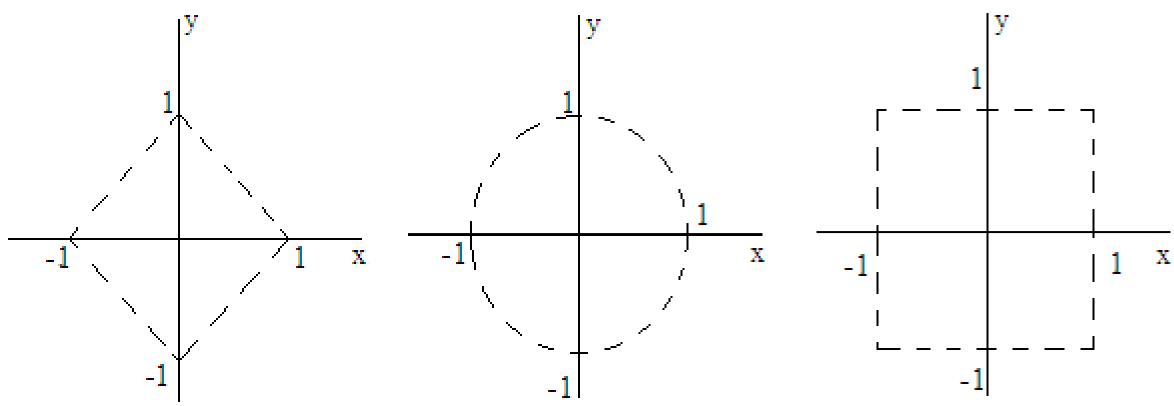
Pour rendre le cours plus simple, et puisque tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique, nous utiliserons les espaces vectoriels normés plutôt que les espaces métriques.

Définition 1.4. Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$ est appelée **boule ouverte** de centre a et de rayon r ;
2. $\overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$ est appelée **boule fermé** de centre a et de rayon r ;
3. $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$ est appelée **sphère** de centre a et de rayon r.

Dans l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$, $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}, |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$, c'est à dire une boule ouverte de centre a et de rayon r est un intervalle ouvert centré en a et de longueur $2r$. $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$. Plus généralement, les boules ouvertes et les boules fermées dans $\mathbb{R}$ sont respectivement les intervalles ouverts et fermés : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}, |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}\} = B(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$; $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}\} = \overline{B}(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$.

La figure ci-dessous donne une représentation géométrique d'une boule unité, une boule centrée en 0 et de rayon 1 pour chacune des normes $\|.\|_1, \|.\|_2 et \|.\|_\infty$ définies respectivement sur l'espace $\mathbb{R}^2$



La boule unité pour la norme $\|.\|_1$ — La boule unité pour la norme $\|.\|_2$ — La boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$

La figure 1.1 montre que dans $\mathbb{R}^n$, en particulier dans $\mathbb{R}^2$, il est toujours possible d'inclure une boule pour une norme donnée dans une boule pour une autre norme. Cette propriété caractérise les normes équivalentes. La notion de norme est utilisée pour étudier les notions de convergence, de continuité.... Ainsi, par exemple, si une suite converge (resp. si une fonction continue) pour une norme donnée, alors cette même suite (resp. fonction) converge (resp. continue) pour toute autre norme équivalente à la première. Par contre, si deux normes ne sont pas équivalentes, on peut avoir une fonction continue ou une suite convergente pour l'une des normes sans qu'elle le soit pour l'autre.

Définition 1.5.

1. On appelle **voisinage** d'un élément x tout ensemble noté V_x pour lequel il existe une boule ouverte $B(x,r)$ vérifiant $B \subseteq V_x$;
2. On dit qu'un ensemble O est un **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses éléments, c'est à dire $\forall x \in O, \exists r > 0$ tels que $B(x,r) \subseteq O$;
3. On dit qu'un ensemble F est un **fermé** si et seulement si son complémentaire F^c est un ouvert.
4. On dit qu'une partie $A \subset E$ est **bornée** si on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de A.

Exemple 1.7. $\star$ *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ muni de la norme $|.|$. Les intervalles ouverts $]a,b[$ sont des ouverts, et les intervalles fermés $[a,b]$ sont des fermés. Par contre, l'intervalle $[a,b[$ n'est ni*

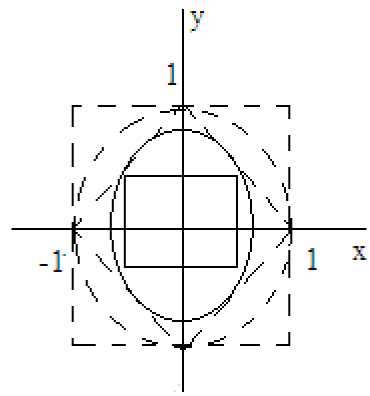


FIGURE 1.1

ouvert ni fermé (pourquoi).

Proposition 1.8. *Dans un e.v.n, les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées sont des fermés.*

Démonstration. Voir TD. □

Propriétés. Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n. alors :
1. Toute union finie ou infinie d'ouverts de E est un ouvert ;
2. Toute intersection finie d'ouverts de E et un ouvert ;
3. Toute union finie de fermés de E est un fermé ;
4. Toute intersection finie ou infinie de fermés de E est un fermé ;
5. Les ensembles E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés ; si ce sont les seuls on dira que l'espace est **Connexe** ;
6. Les ensembles finis de points de E sont fermés .

Définition 1.6. Soit X un ensemble non vide. Une **topologie** sur X est une famille de parties de X notée T vérifiant :

1. $\emptyset, X \in T$;
2. T est stable par union quelconque, c'est à dire tout union d'élément de T est un élément de T ;
3. T est stable par intersection finie, c'est à dire toute intersection finie d'éléments de T est un élément de T.

Dans ce cas le couple (X, T) est appelé **espace topologique.**

D'après la propriété ci-dessus, on voit bien que l'ensemble des ouverts de l'espace $(E, \|.\|)$ constitue une topologie sur E qui s'appelle la topologie induite par la norme de E. Plus généralement tout espace métrique est un espace topologique. Notons que les éléments d'une topologie sont appelés "ouverts" même dans le cas où E n'est pas un e.v.n.

Définition 1.7. Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n et $A \subset E$.

1. On dit que x est un **point intérieur** à A si A est un voisinage de x, autrement dit, si A contient une boule ouverte contenant x. On note $Int(A)$ ou $\mathring{A}$ l'ensemble des point intérieurs à A et on dit $Int(A)$ est l'intérieur de A.

2. Un point x de E est dit **adhérent** à A si toute boule ouverte contenant x contient au moins un élément de A, c'est à dire $\forall r > 0$, $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$. On appelle **adhérence** de A et on la note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.
3. Un point x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage V de x contient un point de A différent de x. Autrement dit, $\forall r > 0, B(x,r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.
4. x est un **point isolé** de A si il existe une boule $B(x,r)$ telle que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.
5. On appelle **frontière** de A, notée $Fr(A)$ l'ensemble défini par $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

Remarquons que si $x \in A$, alors x est un point adhérent à A.

Proposition 1.9. *1. $Int(A)$ est un ouvert et il est le plus grand ouvert contenu dans A.*

2. L'adhérence de A est un fermé et il est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration. Voir TD. □

Définition 1.8. Dans un espace topologique (X,T), on appelle base toutes famille d'ouverts $B \subset T$ vérifiant : Pour tout ouvert $O \in T$, et pour tout $x \in O$, il existe $O' \in B$ tel que : $x \in O' \in O$.

Dans un evn, on a vue que O est un ouvert si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire $\forall x \in O, \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$, donc l'ensemble des boules ouvertes dans un evn constitue une base d'ouverts.

Définition 1.9. Soit (X,T) un espace topologique et soit $A \subset X$. On appelle topologie induite par A la topologie T_A dont la famille d'ouverts est $T_A = \{O \cap A, O \in T\}$. On dit que (A, T_A) est un sous-espace topologique de (X,T). $O \cap A$ est appelé la trace de l'ouvert O sur A.

Si on prend $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle (la topologie définie par la valeur absolue) et $A = [0,2[$. Alors $[0,1[$ est un ouvert de A pour la topologie induite, car $[0,1[=]-1,1[\cap A$ tandis qu'il n'est ni ouvert ni fermé comme partie de $\mathbb{R}$. De même $[1,2[$ est un fermé de A pour la topologie induite car $[1,2[=[1,3] \cap A$.

Définition 1.10. On dit qu'un espace topologique (X,T) est séparé si pour tout couple de points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$, il existe Vx voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$. On dit aussi que la topologie T sépare les points de X.

Proposition 1.10. *Les evn sont des espaces séparés.*

1.4 Ensemble compact et suite convergente dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.11. On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{R}^n$ (ou **suite vectorielle**) toute application

$$\begin{cases} \mathbb{D} \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n; \\ x_p \longmapsto x_p = (x_p^1, x_p^2, \dots x_p^n). \end{cases}$$

On dit alors $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \dots x_{n,p})$ est le terme général de cette suite. On voit bien qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de n suites numériques.

Exemple 1.1. $x_p = (\frac{1}{p+1}, e^{-2p})$ est une suite dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.12. On dit qu'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}^n$, tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geq N, \|x_p - l\| < \epsilon$. On écrit $\lim_{p\to+\infty} x_p = l$ et ce qui est équivalent à $\lim_{p\to+\infty} \|x_p - l\| = 0$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** Le symbole $\|.\|$ désigne l'une des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

La suite $x_p = (\frac{1}{p+1}, e^{-2p})$ converge vers $(0,0)$. En effet, en utilisant la norme $\|.\|_1$ par exemple, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \|x_p - (0,0)\|_1 = \lim_{p\to+\infty} \|(\frac{1}{p+1} - 0, e^{-2p} - 0)\|_1 = \lim_{p\to+\infty} |\frac{1}{p+1}| + \lim_{p\to+\infty} |e^{-2p}| = 0$$

Proposition 1.11. *La limite d'une suite convergente est* ***unique***

Démonstration. On suppose que la suite $(x_p)_p$ admet deux limites l et l'. Alors on a

$$\|l - l'\| = \|l - x_p + x_p - l'\| \leq \|l - x_p\| + \|x_p - l'\| \tag{1.1}$$

En faisant tendre p vers l'infini, l'inégalité 1.1 implique $\|l - l'\| \leq 0$. Mais ceci, par définition d'une norme, implique $l - l' = 0$ et donc $l = l'$.

Proposition 1.12. *Dans $\mathbb{R}^n$, une suite vectorielle $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de terme général $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots x_{n,p})$ converge vers $l = (l_1, l_2 \ldots l_n)$ si et seulement si pour $i = 1 \ldots n$, la suite numérique $(x_{i,p})_p$ converge vers l_i.*

Démonstration. Donnons une preuve en utilisant la norme infinie. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots x_{n,p})$ une suite convergente vers $(l_1, l_2 \ldots l_n)$. Alors

$$\lim_{p\to+\infty} \|x_p - l\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{p\to+\infty} \max_i |x_{i,p} - l_i| = 0 \Leftrightarrow \lim_{p\to+\infty} |x_{i,p} - l_i| = 0, \forall i$$

et ceci est équivalent à : $\lim_{p\to+\infty} x_{i,p} = l_i$ pour tout i.
Exercice : Reprendre la démonstration de la proposition ci-dessus en utilisant une autre norme de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.13. La suite $(x_p)_p$ est dite **bornée** si et seulement si l'ensemble $\{x_p; p \in \mathbb{N}\}$ est borné. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}, \|x_p\| \leq M$.

Proposition 1.13. *Toute suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est bornée.*

Remarque 1.4. Dans $\mathbb{R}^n$, une suite bornée peut ne pas converger (donner un exemple qui montre ça).

Définition 1.14. On dit qu'une suite $(x_p)_p$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une suite de **Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq N, q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \epsilon$$

.

Remarque 1.5. Là aussi, une suite vectorielle est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n suites numériques sont de Cauchy.

Définition 1.15. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $(x_p)_p$ est une suite de points de A si pour tout $p \in \mathbb{N}, x_p \in A$. On dit que la suite $(x_p)_p$ converge dans A s'il existe $l \in A$ tel que $\lim_{p\Rightarrow+\infty} x_p = l$.

Proposition 1.14. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_p)_p$ une suite convergente vers l, alors pour $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N \Rightarrow \|x_p - l\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Soient maintenant p, q deux entiers tels que $p \geq N, q \geq N$, alors, $\|x_p - x_q\| = \|x_p - l + l - x_q\| \leq \|x_p - l\| + \|x_q - l\| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. D'où $(x_p)_p$ est une suite de Cauchy.

Remarque 1.6. D'après cette proposition, si $(x_p)_p$ est une suite d'éléments de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ qui converge dans A, elle est aussi de Cauchy. Cependant, on peut trouver une suite dans A de Cauchy et qui ne converge pas dans A. En effet, soit par exemple la suite $x_p = (\frac{1}{p}, \frac{p}{p+1})$. Il est claire que cette suite converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $(0, 1)$, donc elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ (proposition 1.14). Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in A =]0, 1] \times [1, 2]$. Puisque x_p est une suite de Cauchy sur $\mathbb{R}^2$, elle l'est aussi sur A. Mais le point $(0, 1)$, la limite de la suite en question, n'appartient pas à A.

Définition 1.16. On dit qu'un ensemble A (ou un EVN en général) est **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de **Banach**.
Ainsi, l'ensemble $A =]0, 1] \times [1, 2]$ n'est pas complet. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach (ça se démontre mais on va pas le faire ici !).

Définition 1.17. Dans $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un ensemble A est **Compact** s'il est fermé et borné.
L'ensemble $A =]0, 1] \times [1, 2]$ n'est pas compact, car il n'est pas fermé. Par contre $\overline{A} = [0, 1] \times [1, 2]$ est un compact (car le produit cartésien de deux intervalles fermés et bornés donne un ensemble fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$).

Proposition 1.15. *Dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont des ensembles complets.*

1.5 Références

[1] E. Azoulay, J.Avignant, G.Auliac : Les mathématiques en licence (Tomes 1 à 4) Edi Science.
[2] *J.Dixmier : Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (en deux volumes) Dunod.*
[3] *J.Monier : Cours de mathématiques (Analyse 1, 2,3 et 4) Dunod.*
[4] *J.lelong-ferand, J.M.Arnaudies : Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (tome 2 Analyse, tome 3 Géométrie et cinématique, tome 4 équations différentielles et intégrales multiples) Dunod.*
[5] *B.Calvo, A.Calvo, J.Doyen,F.Boschet : Cours d'analyse de I à V. 1er Cycle et Classes préparatoires aux grandes Écoles. Armand Colin, Collection U.*
[6] *R.Couty, J.Ezra : Analyse. Armand Colin, Collection U.*
[7]*. Azoulay, J.Avignant, G.Auliac, « Les mathématiques en licence (Tomes 1 à 4) », Edi Science.*
[8] *J.Dixmier, « Cours de mathématiques. Cycle préparatoire », Deux volumes, Dunod.*
[9] *J.Monier, « Cours de mathématiques », (Analyse 1, 2,3 et4) , Dunod.*
[10] *J.lelong-ferand, J.M.Arnaudies, « Cours de mathématiques. Cycle préparatoire (tome 2 Analyse, tome3 Géométrie et cinématique) », Dunod.*
[11] *B.Calvo, A.Calvo, J.Doyen,F. Boschet, « Cours d'analyse de I à V. 1er Cycle et Classes préparatoires aux grandes Ecoles. Armand Colin », Collection U.*
[12] *R.Couty, J.Ezra, « Analyse », Armand.*
[13] *Yadolah Dodge. Optimisation appliquée. Springer-Verlag France 2005.*
[14] *D.E.MEDJADI, M.BOUKRA, A.DJEDANE, B.K.SADALAH : Analyse Mathématiques, vol 2 OPU (1996).*