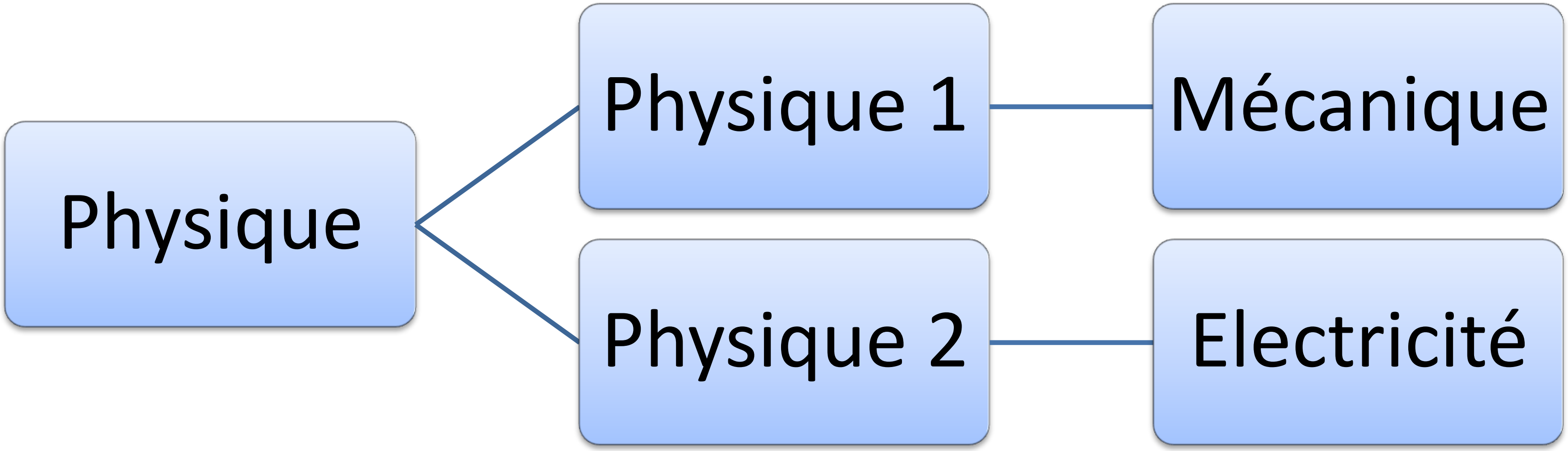
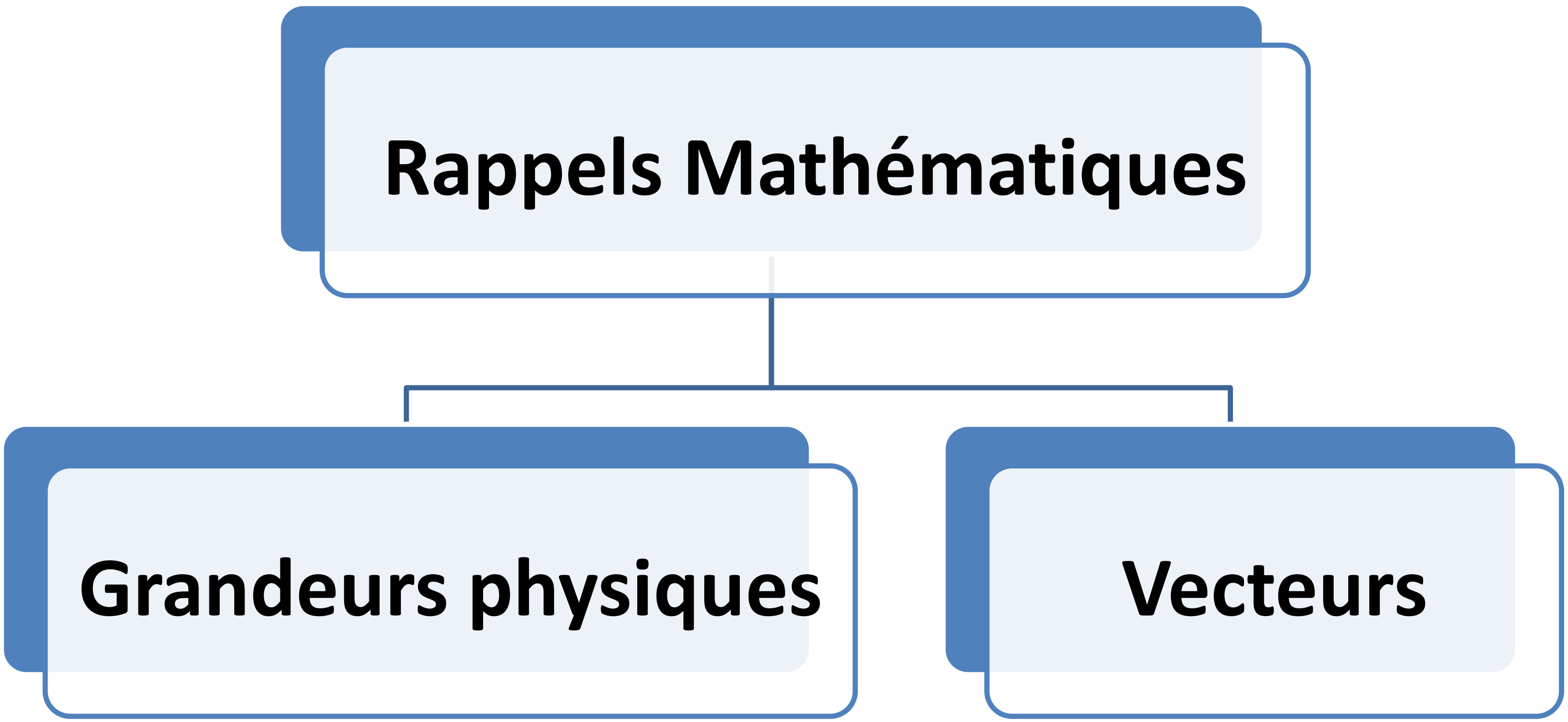
Cours de physique destiné aux étudiants de 1 ère année ST



Semestre 1
Mécanique

- Chapitre 1: Rappels mathématique
- Chapitre 2 : Cinématique
- Chapitre 3 : Dynamique
- Chapitre 4: Travail et énergie

Chapitre I

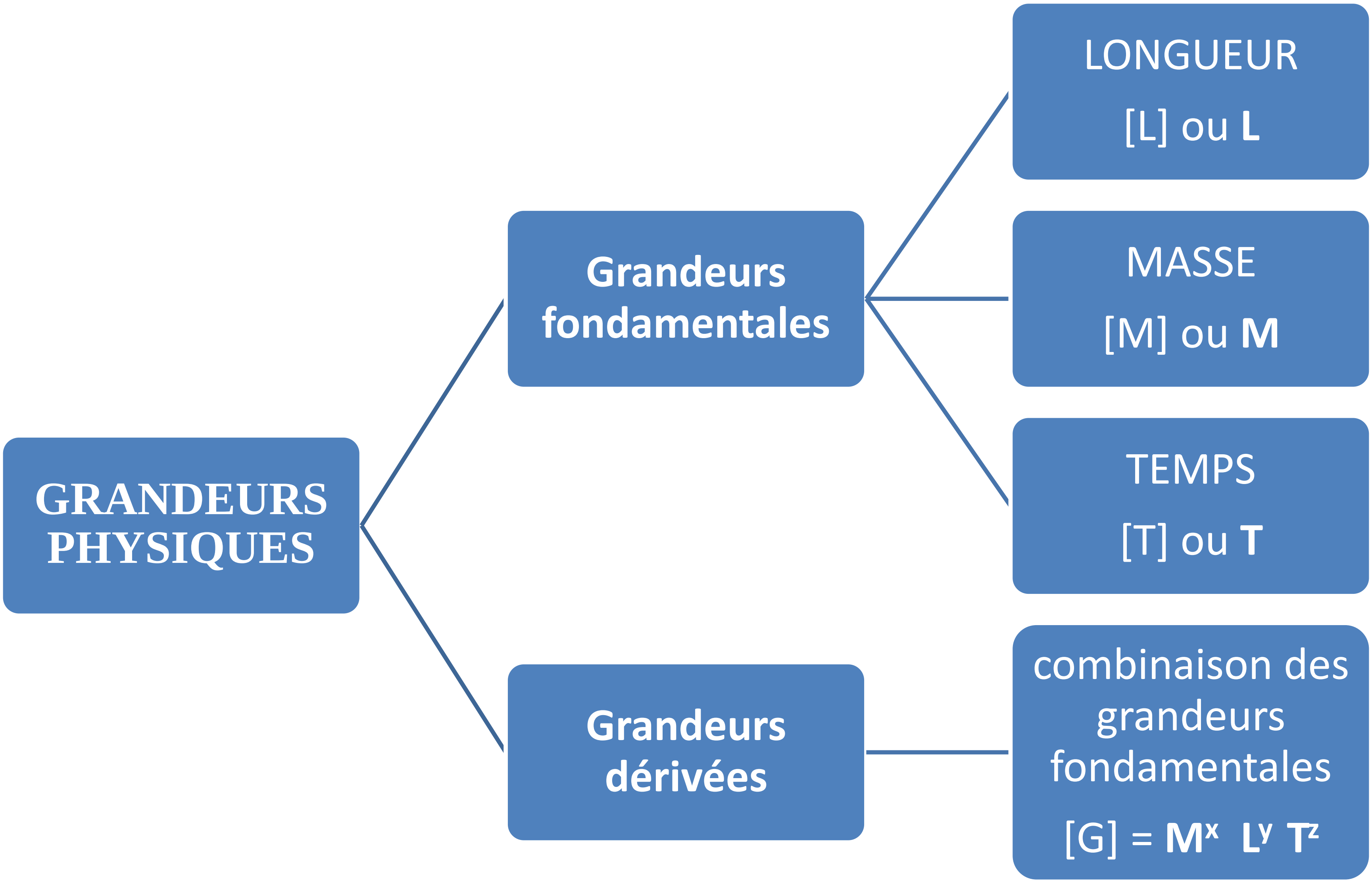


La physique est une science fondamentale basée sur les observations expérimentales, pour comprendre et expliquer les phénomènes naturels de l'univers.

La physique décrit la matière et l'espace, leurs propriétés et leurs comportements. Les **propriétés mesurables** sont nommées :

GRANDEURS PHYSIQUES

- **grandeur scalaire** : leur mesure s'exprime par un simple nombre
- **grandeur vectorielle** : un ensemble de plusieurs nombres (vecteur) est nécessaire pour les représenter


GRANDEURS PHYSIQUES
Grandeurs fondamentales
Grandeurs dérivées
LONGUEUR
[L] ou **L**
MASSE
[M] ou **M**
TEMPS
[T] ou **T**
combinaison des grandeurs fondamentales
[G] = $\mathbf{M}^{x}$ $\mathbf{L}^{y}$ $\mathbf{T}^{z}$

Grandeurs fondamentales

Grandeur physique	**Lettre utilisée**	**Unité de mesure S.I.**	**Symbole de l'unité**
Masse	M	kilogramme	kg
Longueur	L	mètre	m
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	Ampère	A
Température	Θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	candela	cd
Quantité de matière	N	mole	mol

Exemples de Grandeurs dérivées

- SURFACE: La surface étant le produit de 2 longueurs sa grandeur physique $S = L \times L = L^2$
Unité, mètre carré. (m^2).

- VITESSE: Distance parcourue par unité de temps
$v = \frac{dx}{dt}$ d'ou la grandeur : **[v] = L T^{-1}** Unité : m/s (mètre par seconde)
- FORCE: Une force appliquée à une masse pour la faire accélérer. C'est le principe fondamental de la dynamique. donc $F = m\,\gamma$. grandeur : $[F] = [m]\,[\gamma] =$ **M LT^{-2}**
Unité : le Newton (N) force qui accélère une masse de 1kg de $1 m/s^2$.

Equations aux Dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées à partir des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T. Ainsi une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par: $[v] = \frac{[l]}{[t]} = LT^{-1}$

- une force : $[F] = [m][a] = \frac{[m][v]}{[t]} = MLT^{-2}$
- un travail : $W = Fl \rightarrow [W] = [F].[l] = ML^2T^{-2}$

-une énergie : $E = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 \rightarrow [\mathrm{E}] = \left[\frac{1}{2}\right][\mathrm{m}][\mathrm{v}]^2 = \mathrm{M}L^2T^{-2}$

Remarque

Certaines grandeurs n'ont pas de dimension comme certaines constantes, attention pas toutes les constantes. Les fonctions mathématiques comme par exemple sin, cos, tan, exp, log n'ont pas de dimension : [sin] = 1 ; [cos] = 1…. ; . Leurs arguments x non plus : sin(x), cos(x), tan(x), exp(x), log(x) etc. donc : [x] = 1.

Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions permettent de vérifier la cohérence des équations lors de calculs de physique. Une formule est homogène si les deux membres ont les mêmes dimensions. Cependant, il ne suffit pas qu'une équation soit homogène pour qu'elle soit juste.

Exemple: $E = mc^2$

$[E] = M\,L^2T^{-2}$

$[mc^2] = [m]\,[c]^2 = M\,V^2 = M\,(L\,T^{-1})^2 = M\,L^2T^{-2}$

Donc l'équation est homogène

On ne peut additionner ni soustraire que les termes ayant les mêmes dimensions

Exemple:

Si $A = B \pm C$ alors $[A] = [B] = [C]$

Exercice 1

1. Ecrire l'équation aux dimensions d'une puissance. En déduire son unité dans le système international. quelle est son unité dérivée associée ? quelle est son symbole ?

2. Parmi ces expressions de la période d'un pendule simple, une seule est correcte. Indiquer laquelle :

$$T_A = 2\pi\sqrt{l/m} \qquad T_B = 2\pi\sqrt{m/l}$$

$$T_C = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad T_D = 2\pi\sqrt{g/l}$$

Exercice 2

Vous passez un examen de physique ou vous avez besoin de calculer la force centrifuge exercée sur une masse en rotation. Vous avez oublié sa formule mais vous gardez en tête qu'elle dépend de la masse *m*, de la vitesse de rotation *v* et du rayon de courbure *R.* Au lieu de chercher la réponse a droite ou a gauche, retrouvez la formule grâce à une analyse dimensionnelle !

Solution

L'expression générale de F_c : $F_c = m^a v^b R^c$

Analyse dimensionnelle : $[F_c] = [m^a v^b R^c] = [m]^a [v]^b [R]^c$

$$M.L.T^{-2} = M^a.(L.T^{-1})^b.L^c = M^a.L^{b+c}.T^{-b}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + c = 1 \\ -b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

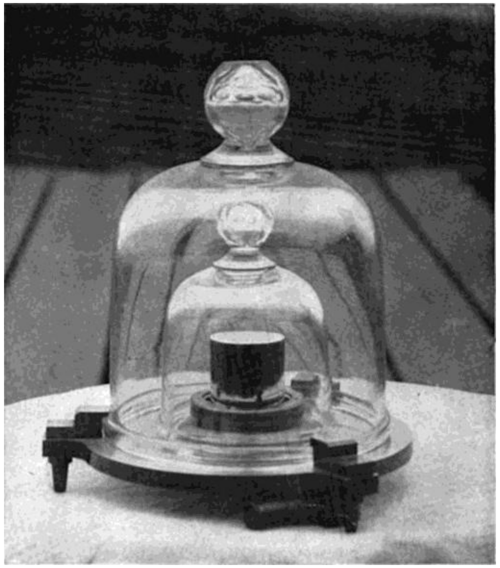
Donc $F_c = m\frac{v^2}{R}$

Systèmes d’unités en physique

Mesurer c’est comparer une grandeur physique avec un étalon qui définit l’unité de mesure. La bonne idée consiste alors à choisir des étalons avec lesquels on peut construire toutes les unités et adopté par quasiment tous les pays.

Le système international (S.I.) est constitué par les unités MKSA (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte les définitions supplémentaires de l’unité de température (Kelvin), de l’unité d’intensité lumineuse (Candela) et de la quantité de matière (Mole).

Chacune de ces sept unités est définie par un phénomène physique particulier. On peut exprimer n’importe quelle unité en fonction d’une ou plusieurs des sept unités du système international.



Exemple : l’énergie W s’exprime en joules (J).

L’énergie cinétique s’écrit : $W_C = ½.m.v^2$

→ grandeur : $[W_C] = \mathbf{M.L^2.T^{-2}}$

→ conséquence : $1\ J = 1\ kg.m^2.s^{-2}$

Exercice 3

Dans le système CGS, l'unité de l'énergie et la pression sont respectivement l'erg et la barye. Grace à l'analyse dimensionnelle, écrire ces unités dans le système SI.

Solution

$[E] = M.L^2.T^{-2}$ donc le rapport entre les deux unités d'énergie :

$$\frac{1\,J}{1erg} = \frac{1kg.m^2.s^{-2}}{1g.cm^2.s^{-2}} = \frac{1kg.m^2.s^{-2}}{10^{-3}kg.10^{-4}m^2.s^{-2}} = 10^7 \Rightarrow 1J = 10^7 erg$$

$[Pr] = [F][s]^{-1} = M.L.T^{-2}.L^{-2} = M.L^{-1}.T^{-2}$

$$\frac{1\,Pa}{1barye} = \frac{1kg.m^{-1}.s^{-2}}{1g.cm^{-1}.s^{-2}} = \frac{1kg.m^{-1}.s^{-2}}{10^{-3}kg.10^2m^{-1}.s^{-2}} = 10 \Rightarrow 1Pa = 10\ barye$$

Les Vecteurs

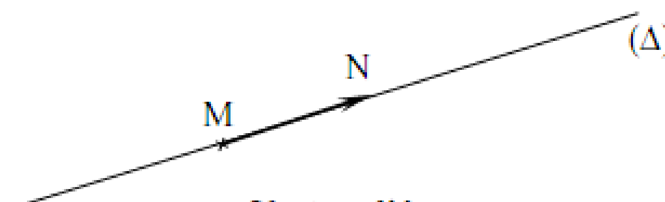
Définitions

Un vecteur est un segment de droite *MN*, ayant une origine *M* et une extrémité *N*. On le note symboliquement par $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A}, \ldots$ Il est complètement défini si l'on se donne :

- Son origine ou point d'application M.
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement

  d'un mobile allant de M vers N.
- Sa norme (ou module) toujours positive

  qui est la longueur MN. On le note



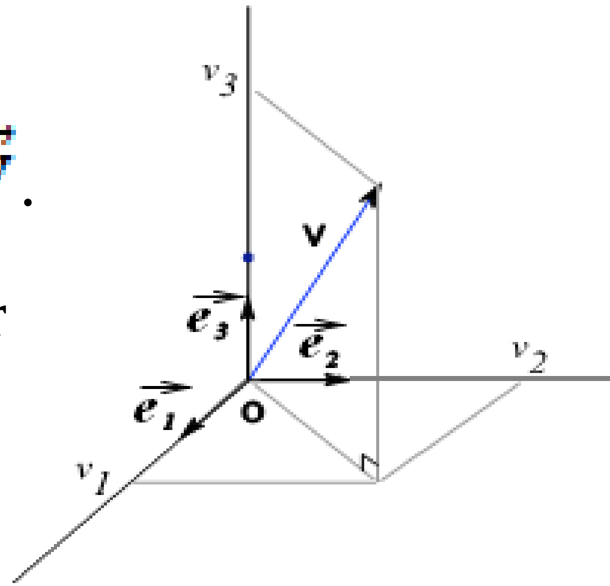
Vecteur lié

Composantes d’un vecteur

Dans une base orthonormée directe que nous noterons

$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ on montre que tout vecteur $\overrightarrow{V}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\overrightarrow{V} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2} + v_3 \overrightarrow{e_3}$$



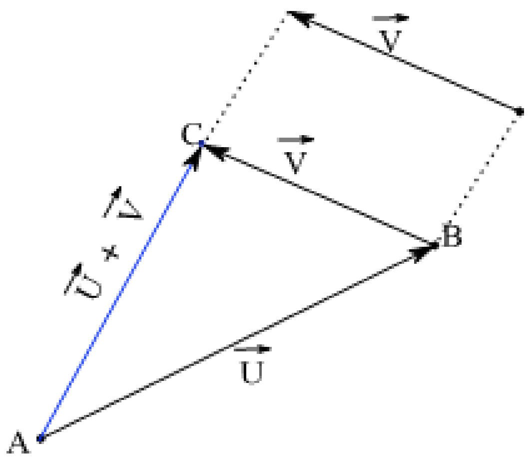
Les réels v_1, v_2 *et* v_3 sont les coordonnées de $\overrightarrow{V}$.

On représente alors le vecteur comme un vecteur colonne:

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Addition de deux vecteurs

Par définition, la somme de deux vecteurs $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ est un vecteur, dont on obtient la représentation en mettant bout à bout les deux vecteurs (par translation) et en joignant les extrémités



La somme des vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

s'écrit dans la même base $\vec{V} + \vec{W} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

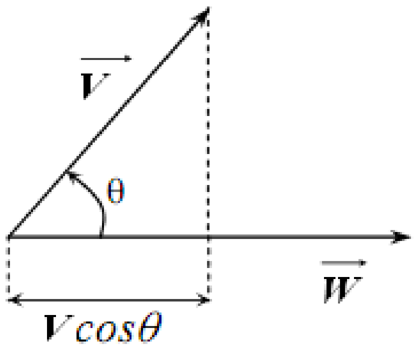
En conséquence si l'ont connait les coordonnées de deux points A et B dans une base on peut facilement calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad ; \vec{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$, faisant entre eux l'angle θ, le nombre

$$\vec{V}.\vec{W} = \left\|\vec{V}\right\| \times \left\|\vec{W}\right\| \times \cos\theta$$



Si l'on connait les composantes des deux vecteurs dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprimera uniquement en fonction des coordonnées :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}.\vec{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Conséquences

1. La norme d'un vecteur peut s'exprimer comme un produit scalaire:

$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\left\|\overrightarrow{V}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

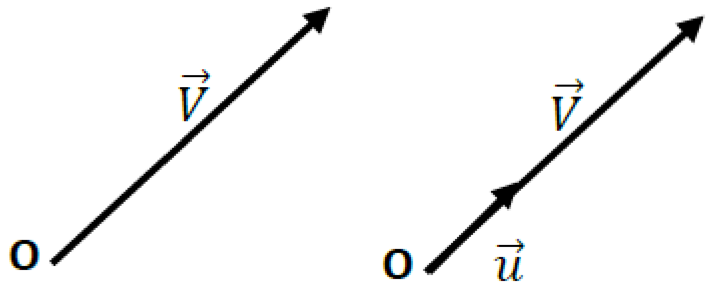
2. Si deux vecteurs forment un angle droit, leur produit scalaire est nul

$$\overline{V} \perp \overline{W} \Rightarrow \overline{V}.\overline{W} = 0$$

3. L'angle entre de vecteur peut être déterminé par :

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 . \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| . \|\vec{V}_2\|}$$

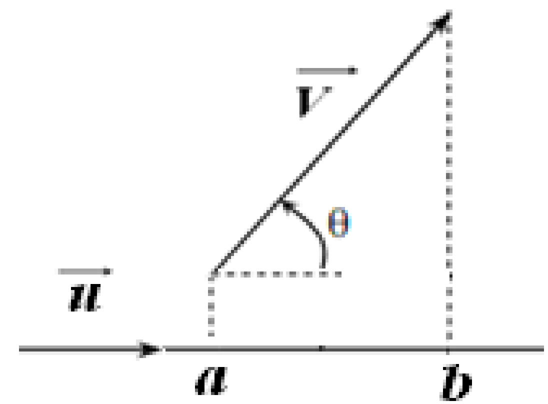
4. Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1. Par exemple, le vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{V}$ et de même sens s'écrit :



$$\vec{V} = V\vec{u} \rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{V}}{V}$$ avec

$\|\vec{V}\| = |\vec{V}| = V$ le module de $\vec{V}$

5. De manière générale, la mesure de la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ est donnée par : $|ab| = \vec{V}.\vec{u} = \|\vec{V}\| \, cos\, \theta$



6. Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si

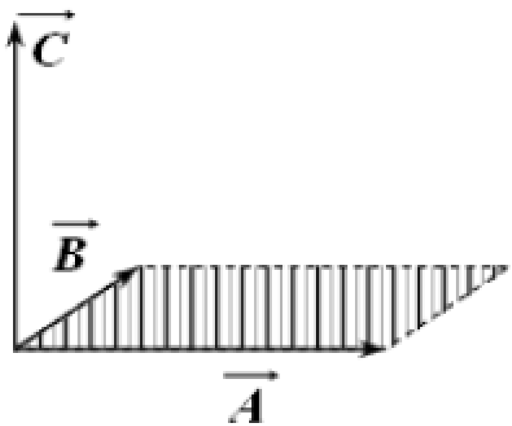
$\vec{V} = \lambda \vec{W}$ ou bien $\alpha \vec{V} + \beta \vec{W} = \vec{0}$ (α β λ sont réels)

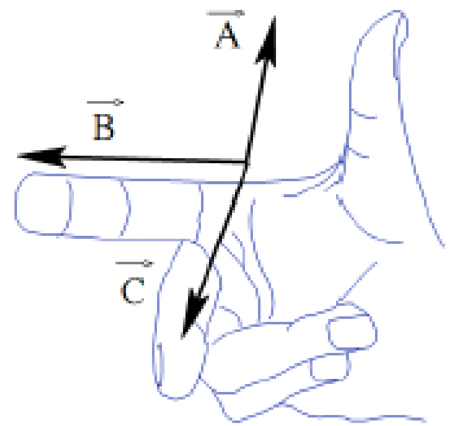
Produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, noté $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ et dont:

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (règle de la visse);
- la module correspond à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et vaut

$$\left\|\vec{A} \wedge \vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}\right\| \times \left\|\vec{B}\right\| \times \left|\sin(\vec{A}, \vec{B})\right|$$





Supposons que l'on connaisse les composantes des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans une base orthonormée directe

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3)\vec{\imath} - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\vec{\jmath} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{k}$$

- **Conséquences**

Il est facile de voir qu'intervertir les vecteurs produit un vecteur opposé :

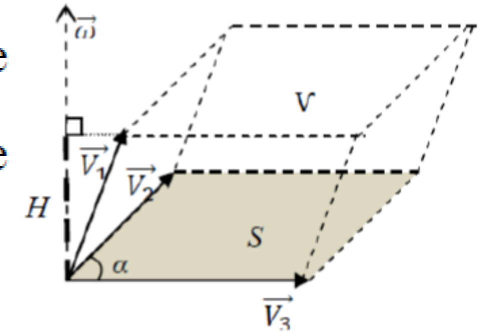
$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = -(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A})$$

Le produit vectoriel permet de savoir si deux vecteurs sont colinéaires:

$$\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

Produit mixte

Le produit mixte des tris vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est défini comme le scalaire $= (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3$. si les trois vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire coplanaire, alors le produit mixte est nul



la valeur absolue est égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3).\vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1).\vec{V}_2$$

Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors le volume (le produit mixte) est nul

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $R(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont données par :

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}\ ;\ \vec{B} = 3\vec{\imath} - 4\vec{k}\ ;\ \vec{C} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1- Représenter le vecteur $\vec{A}$;

2- Calculer le vecteur $3\vec{A} + 2\vec{B} - 4\vec{C}$;

3- Trouver $\|\vec{A}\|, \|\vec{B}\|, \|\vec{C}\|$ et $\|\vec{A} - \vec{B}\|^2$;

4- Donner le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{A}$;

5- Calculer $\vec{A}.\vec{B}$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs ;

6- Calculer $\vec{A} \times \vec{B}$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs ;

7- Exprimer la composante du vecteur $\vec{C}$ suivant la direction du vecteur $\vec{A}$;

8- Calculer $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ et $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$;

Solution

1- $3\vec{A}+2\vec{B}-4\vec{C}=3\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\17\\-26\end{pmatrix}$, donc,

$$3\vec{A}+2\vec{B}-4\vec{C}=8\vec{\imath}+17\vec{\jmath}-26\vec{k}$$

$$\left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|^2=\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=\left(-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right).\left(-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}\right)=(-1)^2+(-1)^2+(2)^2$$
$$=6$$

2- $\left\|\vec{A}\right\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$, $\left\|\vec{B}\right\|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $\left\|\vec{C}\right\|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}$,

3- $\vec{u}_A=\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}=\frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}-\frac{2}{3}\vec{k}$ et $\vec{u}_B=\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}=\frac{3}{5}\vec{\imath}-\frac{4}{5}\vec{k}$

4- $\vec{A}.\vec{B}=14$, $cos\alpha=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}=\frac{14}{15}\rightarrow\alpha=21.04^\circ=0.367rad$

5- $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$

$$S=\|\vec{A}\times\vec{B}\|=\sqrt{16^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}\text{ us}$$

6- La composante de $\vec{C}$ suivant la direction de $\vec{A}$:

$$\vec{C}.\vec{u}_A=(\vec{\imath}-5\vec{\jmath}+3\vec{k}).\left(\frac{2}{3}\vec{\imath}-\frac{1}{3}\vec{\jmath}-\frac{2}{3}\vec{k}\right)=1/3$$

7- $(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}=(4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}).(\vec{\imath}-5\vec{\jmath}+3\vec{k})=3$

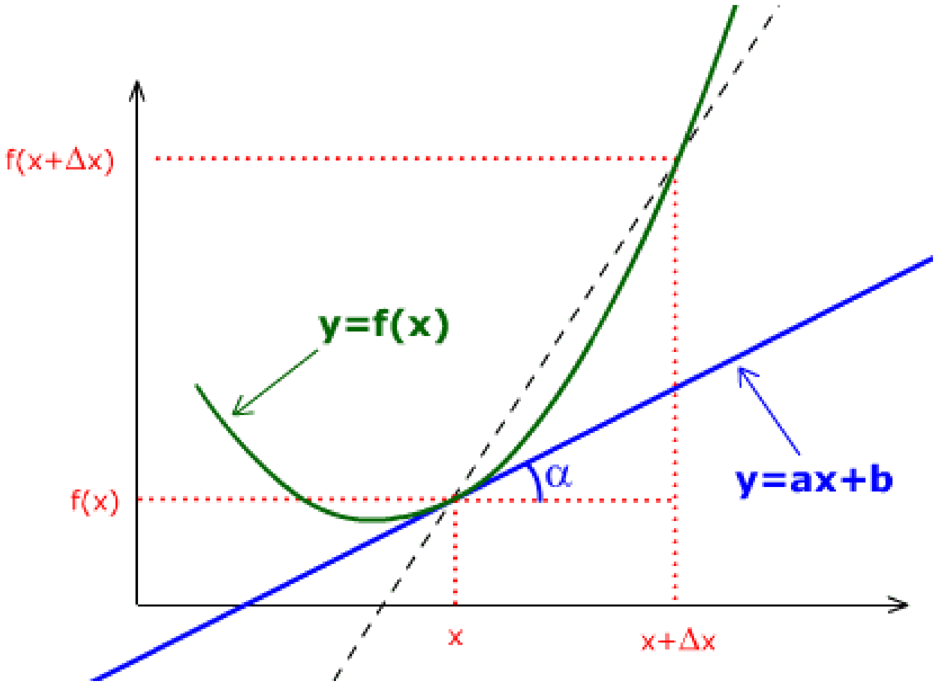
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=21\vec{\imath}-9\vec{\jmath}-22\vec{k}$$

Dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction *f(x)* dans un domaine de continuité est définie par :

$$f^{'}(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La dérivée est égale à la tangente de l'angle formé par la droite tangente à la courbe avec l'horizontale



La **dérivation** est un outil fondamental dans l'analyse de fonctions qui permet de mesurer la sensibilité au **changement d'une fonction.**

Le calcul de **dérivée** est souvent utilisé en physique pour calculer une **vitesse** ou une **accélération** .

Dérivée d'une fonction à plusieurs variables

La dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables *x, y,* … par rapport à l'une des variables, *x* par exemple est définie par :

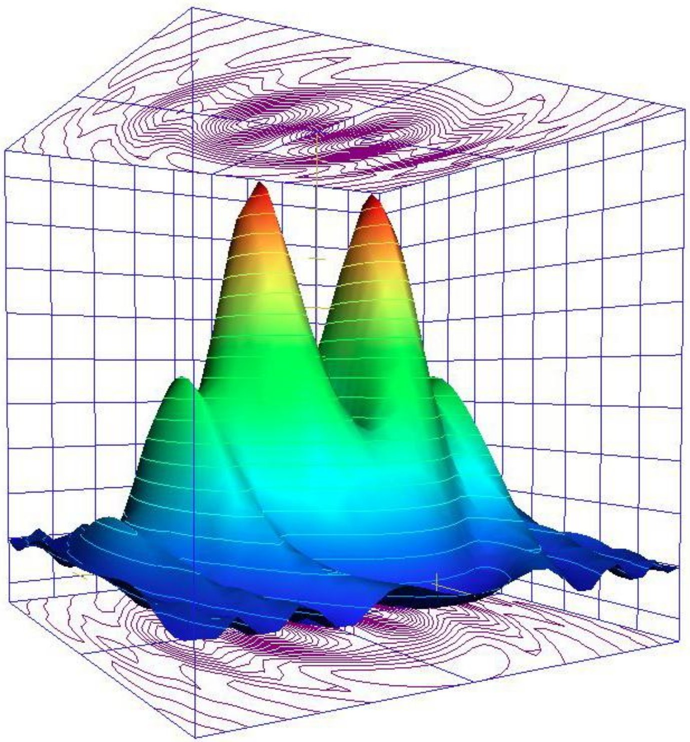
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, \ldots) - f(x, y, \ldots)}{\Delta x}$$

Les autres variables sont considérées comme des constantes

Exemple :

Cherchons les dérivées partielles de $f(x,y,z) = x^3yz^2+3x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2yz^2+6x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3z^2$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3yz$



Différentielle

La différentielle d'une fonction ***df*** lorsqu'elle existe indique la variation de la fonction pour une variation infinitésimale de toutes ses variables.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \cdots$$

Analyse vectorielle :
gradient, rotationnel divergence et Laplacien

- **Opérateur ' nabla' :** L'opérateur 'nabla' ou $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il se définit comme suit :

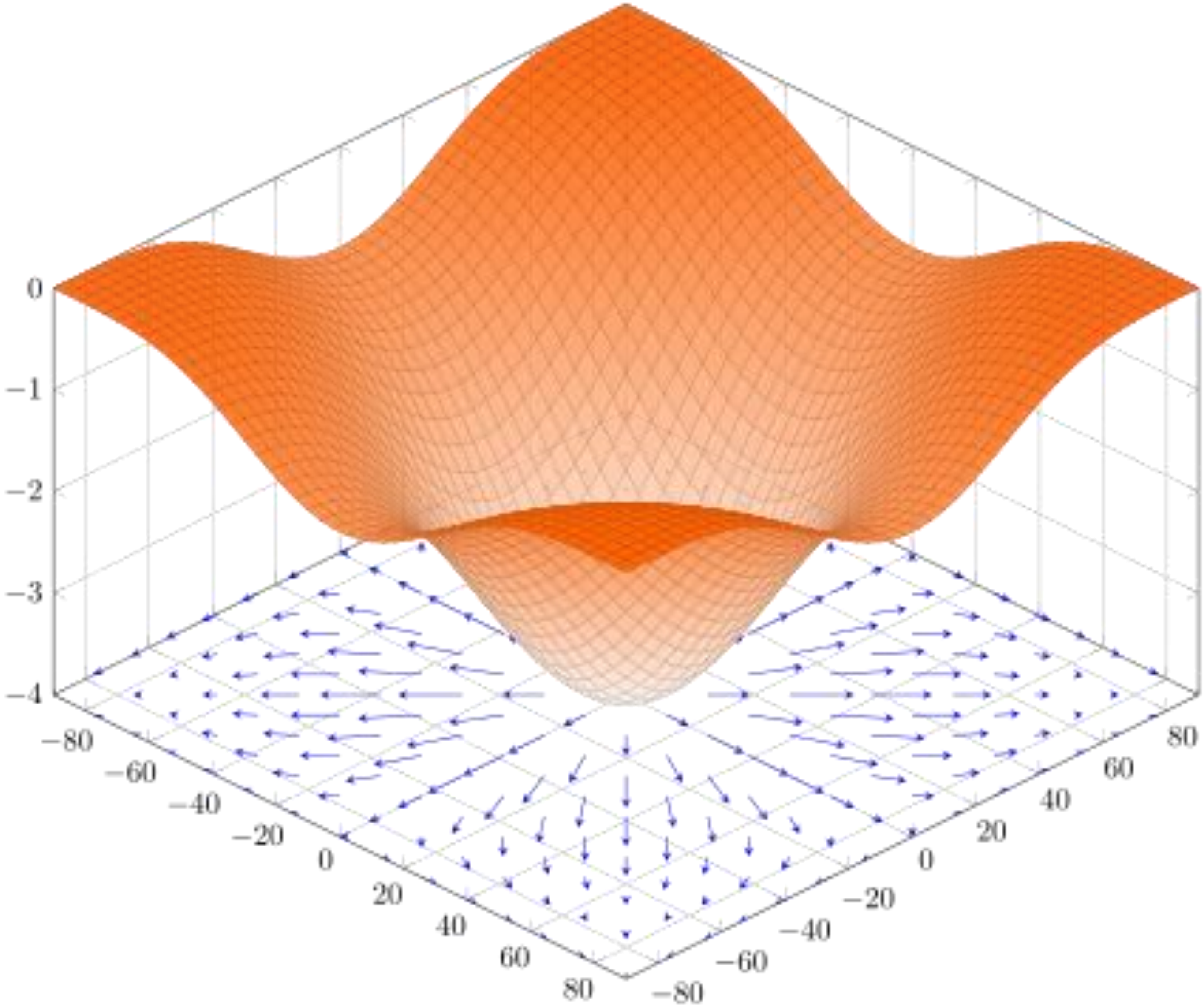
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et laplacien

- **Gradient :** Le gradient d'une fonction scalaire $f\,(x, y, z)$ est un vecteur dont les composantes dans une base orthonormée sont les dérivées partielles de f par rapport à chaque variable :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En physique et en analyse vectorielle, le gradient est un vecteur indiquant comment une grandeur physique varie dans l'espace

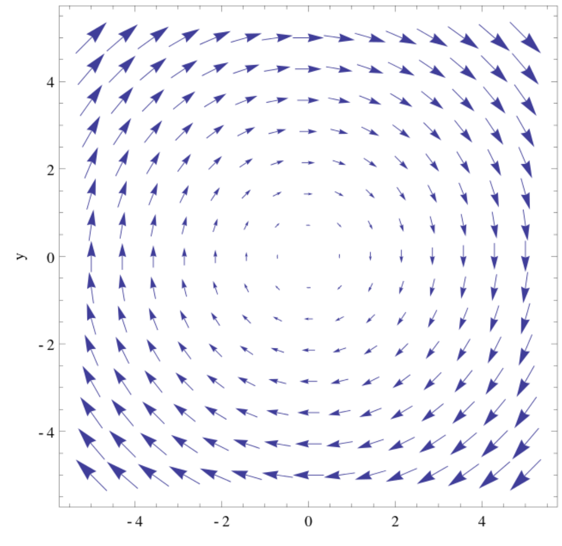


- **Divergence:** La divergence d'un vecteur dont les composantes $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ sont fonctions des coordonnées (x,y,z) est un scalaire dont la valeur est

$$div\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **Rotationnel :** Le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ est un vecteur tel que :

$$\overrightarrow{rot\,F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



- **Laplacien :** On appelle Laplacien d'une fonction scalaire $f\,(x, y, z)$ la divergence de son gradient

$$div(\overrightarrow{grad}f) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Exercice 5

- Calculer le gradient du champ scalaire suivant :

$$U(x,y,z) = 2x^2yz^3 - 3x^3y^2z$$

Evaluer $\overrightarrow{grad}U$ au point $M(1,-1,2)$.

- Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\vec{\imath} + (y^3z - 2yx)\vec{\jmath} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

- Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$= (4xyz^3 - 9x^2y^2z)\vec{i} + (2x^2z^3 - 6x^3yz)\vec{j}$$

$$+(6x^2yz^2 - 3x^3y^2)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}U(M) = \overrightarrow{grad}U(1,-1,2) = -48\vec{i} + 38\vec{j} - 27\vec{k}$$

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= 3(x^2y + y^2z + z^2x) - 2(x + y + z)$$

$$\overrightarrow{rotV} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$