

POLYCOPIE DE COURS

INTITULÉ

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Rédigé par

Dr LEHOUCHE Hocine

Enseignant chercheur

À l'Université A-Mira de Bejaia

- Algérie -

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1: GENERALITES SUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES

- 1.1 Introduction
- 1.2 Le principe de superposition.
- 1.3 Classe de système
- 1.4 Réponse indicielle dissymétrique.
- 1.5 Termes d'ordre supérieur.
- 1.6 Points d'équilibre isolés multiples.
- 1.7 Explosion en temps fini.
- 1.8 Limitation du domaine d'attraction.
- 1.9 Cycle limite.
- 1.10 Bifurcation
- 1.11 Orbites chaotiques.
- 1.12 Exemples et applications.

CHAPITRE 2: PLAN DE PHASE

- 2.1 Introduction
- 2.2 Plan de phase pour les systèmes du second ordre.
- 2.3 Techniques de représentation du plan de phase.
- 2.4 Systèmes linéaires autonomes du second ordre.
- 2.5 Méthodes de représentation du plan de phase.
 - 2.5.1 Solutions numériques
 - 2.5.2 Graphe des pentes
 - 2.5.3 Elimination du temps explicitement
 - 2.5.4 Elimination de temps implicitement
 - 2.5.5 Méthode des isoclines
- 2.6 Cycles limites
 - 2.6.1 Définition
 - 2.6.2 Classification des cycles limites
 - 2.6.3 Index topologiques
 - 2.6.4 Théorème de Bendixson.

CHAPITRE 3 : STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV

- 3.1 Introduction
- 3.2 Points d'équilibre.
- 3.3 Stabilité pour les systèmes linéaires.
- 3.4 Définition intuitive de la stabilité.
- 3.5 Définition mathématique de la stabilité
- 3.6 Méthode directe de Lyapunov.
- 3.7 Stabilité locale et linéarisation
- 3.8 Théorèmes invariance de LaSalla
- 3.9 Méthodes de construction des fonctions de Lyapunov.
- 3.10 Instabilité et méthode de Lyapunov
- 3.11 Théorèmes inverse de Lyapunov

CHAPITRE 4: METHODE DU PREMIER HARMONIQUE

- 4.1 Introduction
- 4.2 Système linéaire et non linéaires statique.
- 4.3 Premier harmonique.
- 4.4 Non linéarités communes.
- 4.5 Systèmes en rétroaction.
- 4.6 Croisement et stabilité.

CHAPITRE 5 : THEORIE DE LA PASSIVITE

- 5.1 Introduction
- 5.2 Notion intuitive.
- 5.3 Système statique passif
- 5.4 Définition différentielle de la passivité
- 5.5 Définition intégrale de la passivité
- 5.6 Propriétés.
- 5.7 Passivité et système linéaires SISO.
- 5.8 Systèmes réel positif
- 5.9 Passivité des systèmes linéaires et fonction de Lyapunov.
- 5.10 Systèmes linéaires et non linéarités statiques.

CHAPITRE 6 : COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

- 6.1 Introduction
- 6.2 Linéarisation locale et stabilisation
- 6.3 Linéarisation par bouclage d'état
 - 6.3.1 Linéarisation entrée/état
 - 6.3.2 Linéarisation entrée sortie
 - 6.3.3 Dynamique interne
- 6.4 Outils mathématiques
 - 6.4.1 Dérivées de Lie et crochets de Lie
 - 6.4.2 Degré relatif et forme normale

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GENERALE

En automatique, les modèles linéaires représentent une notion bien établie qui répond à beaucoup de problèmes concrets où l'on cherche une description locale d'un système dynamique. En pratique les systèmes dynamiques sont non linéaires dans leur immense majorité. Pour être tout à fait franc, les systèmes physiques réellement linéaires n'existent pas. Les équations différentielles linéaires, donc les fonctions de transfert, ne sont que des modèles qui correspondent plus ou moins à la réalité, cela revient à dire que tous les systèmes physiques, en générale sont non linéaires.

Lorsque l'on veut analyser puis commander un système, cela signifie que l'on doit disposer d'un modèle mathématique réalisant un compromis entre sa fidélité de comportement qualitatif et quantitatif et sa simplicité de mise en œuvre à des fins d'analyse et de synthèse. Deuxième terme de ce compromis implique que l'étape de modélisation entraîne obligatoirement des approximations et des simplifications afin de permettre une analyse des propriétés du modèle qui ne soit pas trop complexe et une procédure de synthèse de commande efficace.

Il est alors nécessaire de trouver un compromis entre la justesse (toute relative) du modèle et sa complexité. Il est logique de penser que plus un modèle doit coller à la réalité, plus il sera complexe. Pour rassurer aux lectures, nous pouvons malgré tout indiquer qu'une majorité de systèmes physiques peuvent être approximer comme des systèmes linéaires en respectant le domaine de sa linéarité. Le but est d'assurer une transition entre les modèles linéaires et leur limitation vers les modèles non linéaires à base des équations différentielles et les phénomènes essentiellement non linéaires.

Nous proposons donc dans ce cours deux visions indissociables des systèmes : leur complexité par rapport au linéaire d'une part et les possibilités qu'ils offrent pour l'analyse et la conception de lois de commande. Le terme de ce genre de système apparaît de plus en plus pour désigner une multitude disciplines et d'application, par exemple en biologie, en génie mécanique, électrique, chimique, physique, etc.

Ce rapport est une introduction au sujet et l'objectif est de permettre, dans un contenu compact, l'accès à une littérature plus difficile à un large spectre de lecteurs de formation scientifique et technique diverse. Les pré requis ne sont pas excessifs ; de bonnes notions sur les équations différentielles et les représentations associées comme la transformée de Laplace et la notion de fonction de transfert sont requises ; il est nécessaire également de connaître les concepts de représentation d'état linéaire, de commandabilité et d'observabilité.

Le contenu peut être subdivisé en deux parties importantes. La première partie est destinée aux différentes méthodes d'analyse à savoir, le plan de phase pour les systèmes de deuxième ordre, l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov, la méthode de première harmonique et passivité. La deuxième partie traite quelques techniques de commande des systèmes non linéaires, comme l'approche de linéarisation entrée sortie et de linéarisation entrée états.

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION AUX SYSTEMES NON LINEAIRES

1.1 Introduction

La notion de système non linéaire est fondée sur le non respect du principe de superposition. Les systèmes n'obéissant pas au principe de superposition sont nombreux. Plusieurs propriétés sont illustrées pour distinguer cette classe de systèmes, par rapport les systèmes linéaires.

1.2 Principe de superposition

La notion de système non linéaire est fondée sur le non respect du principe de superposition. Les systèmes qui n'obéissent pas au principe de superposition sont très nombreux. Nous présenterons une sous-classe de tels systèmes pour lesquels les équations différentielles ordinaires sont suffisantes à leur description.

Définition 1.1 : Soient deux signaux d'entrées u_1 et u_2 engendrant deux signaux de sortie y_1 et y_2 . La réponse à la somme des entrées $u = u_1 + u_2$ est la somme des réponses individuelles, c'est-à-dire $y = y_1 + y_2$ et celle à αu avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est donnée par αy .

Définition 1.2 : Tout système obéissant au principe de superposition est un système linéaire. Par conséquent tout système qui n'obéit plus au principe de superposition est un système non-linéaire.

Remarque : souvent en pratique, pour calculer une loi de commande, on utilise des modèles linéaires pour leur *simplicité*, systèmes linéaires sont bien connus et sont des approximations des systèmes non linéaires.

Exemple 1.1: système masse-ressort-amortisseur

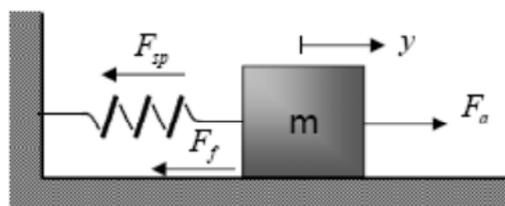


Figure 1.1 : Système masse-ressort

$$m\ddot{y} + F_f(y, \dot{y}) + F_{sp}(y) = F_a \quad (1.1)$$

Elasticité linéaire et amortissement en viscosité

$$F_{sp}(y) = ky, F_f(y, \dot{y}) = b\dot{y} \text{ et } m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_a$$

Elasticité non linéaire (modèle de Duffing)

$$F_{sp}(y) = \begin{cases} k(1 - a^2y^2)y, & |ay| < 1 \\ k(1 + a^2y^2)y & |ay| > 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Frottement non linéaires

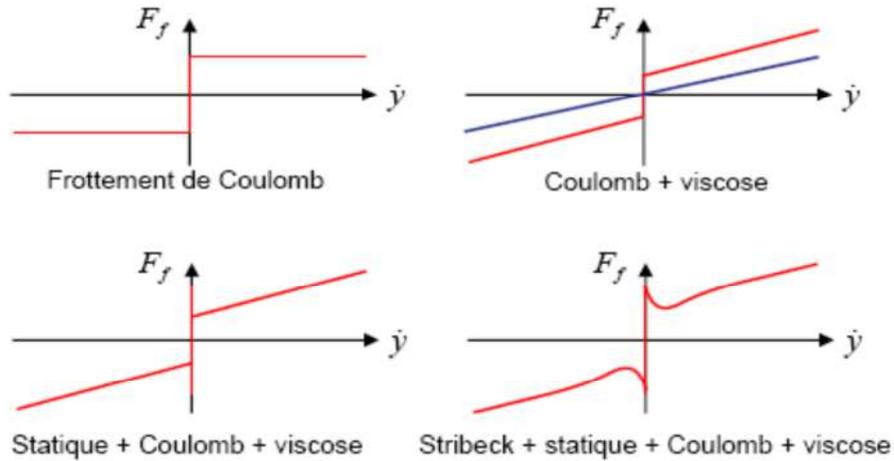


Figure 1.2 : Frottement non linéaires

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + \eta(y, \dot{y}) = F_a \quad (1.3)$$

1.3 Classe de systèmes

1.3.1 Description

La classe de système est celle décrivant les modèles de systèmes physiques qui peuvent se représenter par un ensemble d'équations différentielles ordinaires.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad (1.4)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, f(t, x, u) = \begin{pmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{pmatrix}$$

et réécrire les n équations de première ordre

Description (avec entrée) $\dot{x} = f(x, u)$ est un système non autonome

Description (sans entrée) $\dot{x} = f(x)$ est un système autonome

Cas particulier : systèmes linéaires $\dot{x} = Ax + Bu$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ et } u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$$

- La fonction $f(x, u)$ est continue par rapport x et u .
- La solution de f est unique pour des conditions initiales x_0 et u_0 déterminées.
- La condition sur cette continuité est que $f(x, u)$ soit Lipschitz continue (en chaque point l'évolution infinitésimale locale de $f(x, u)$ doit être bornée).

Définition 1.3 : La fonction $f(x, u)$ est appelée Lipschitz continue selon ces deux arguments x et u lorsque, d'une part, elle est continue selon ses deux arguments x et u et, d'autre part, lorsqu'il existe deux constantes c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ telles que pour toute valeur de x et y (resp. u et v).

$$\begin{cases} \|f(x, u) - f(y, u)\| \leq c_1 \|x - y\| \\ \|f(x, u) - f(x, v)\| \leq c_2 \|u - v\| \end{cases} \quad (1.5)$$

1.3.2 Solution de l'équation différentielle

Système $\dot{x} = f(x)$

Solution $\chi(x_0, t)$

- C'est une trajectoire temporelle
- Condition initiale x_0
- Trajectoire unique pour une condition initiale donnée
- Instant t indiqué lorsque x prend la valeur $\chi(x_0, t)$
- Satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \chi(x_0, t) = f(\chi(x_0, t)) \quad (1.6)$$

1.3.3 Points d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$

- Toute solution x_{eq} telle que $f(x_{eq}) = 0$.
- Lorsque l'état x est à l'équilibre x_{eq} , pas de dynamique.
- Plusieurs points d'équilibre isolés possibles.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, mentionnons que les systèmes non linéaires possèdent des particularités singulières qui sont complètement absentes des systèmes linéaires. Certaines de ces propriétés sont présentées ci-après.

1.4 Réponse indicielle dissymétrique

1.4.1 Système linéaire : Réponse indicielle symétrique

$$\dot{x} = -x + u \quad (1.7)$$

Signal d'entrée symétrique et carré $0 < u < 1$ lui est appliqué. Le signal de sortie $x(t)$ associé suit le signal d'entrée, mais avec une inertie. Les phases de montées alternent avec les phases de descentes de manière symétrique. Le diagramme de gauche de la *fig. 1.3* illustre le résultat.

1.4.2 Système non linéaire particulier : Réponse indicielle dissymétrique

$$\dot{x} = -x|x| + u \quad (1.8)$$

Ce système non linéaire simple exhibe un comportement dissymétrique, la phase de montée est plus rapide que la phase de descente (A droite de la *figure. 1.3*).

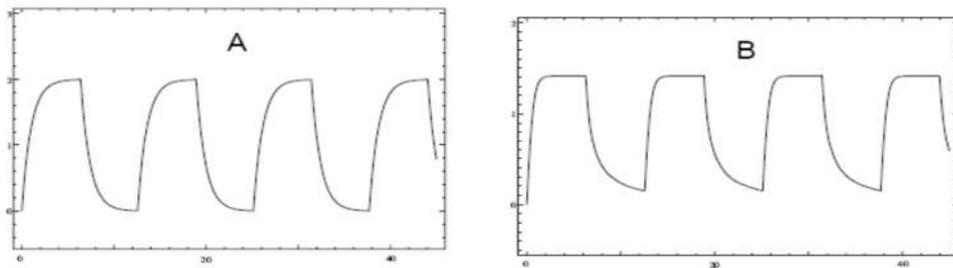


Figure. 1.3 : A gauche, les phases de montée et de descente sont symétriques dans le cas de l'équation $\dot{x} = -x + u$, où u est un signal carré entre +1 et 0. A droite, lorsque $\dot{x} = -x|x| + u$ ce n'est plus le cas.

1.5 Termes d'ordre supérieur

Lorsque la solution d'un système non linéaire s'éloigne suffisamment d'un point d'équilibre les termes d'ordre supérieur du développement en série de Taylor (autour de ce point d'équilibre) contribuent de manière croissante à l'influence sur la dérivée. Il se peut très bien que ces termes présentent un effet déstabilisant sur le comportement global.

Système :

$$\dot{x} = -x + x^2, x(t = 0) = x_0 \quad (1.9)$$

Ne comporte pas d'entrée et possède un point d'équilibre à l'origine.

Linéarisation Jacobienne au point $x = 0$

$$\dot{x} = -x \rightarrow x(t) = x_0 e^{-t} \quad (1.10)$$

qui est stable pour tout x_0

Solution de système original est

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})} \quad (1.11)$$

qui est stable pour tout $x_0 < 1$

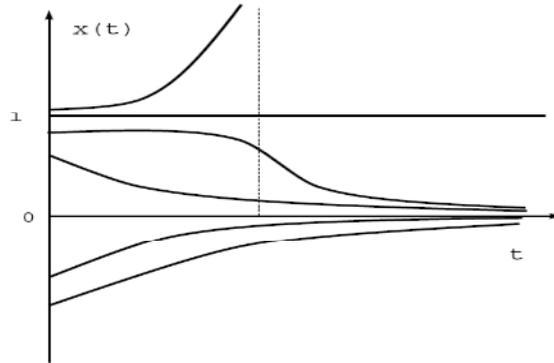


Figure. 1.4 : Les solutions de $\dot{x} = -x + x^2$ sont représentées pour les conditions initiales $x(0)$ suivantes: $\mp 0.2, \mp 0.4, \mp 0.6, \mp 0.8, \mp 1.01, \mp 1.1$. L'instabilité apparaît dès que $x(0) > 1$.

Pour $0 \leq x < 1$, $-x$ domine x^2 . La première constatation est que le comportement n'est pas symétrique par rapport au signe des conditions initiales. La seconde, et la plus importante, est qu'il y a, à la fois des conditions initiales pour lesquelles la solution s'éloigne de plus en plus du point d'équilibre au fur et à mesure que le temps progresse et d'autres pour lequel la solution converge vers la valeur d'équilibre $x=0$. La séparation se produit lorsque la condition initiale $x(0)$ est supérieure à 1.

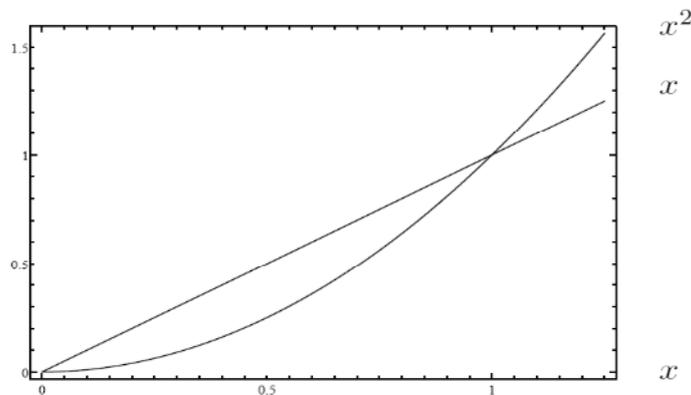


Figure. 1.5 : La stabilité de $\dot{x} = -x + x^2$ est déterminé par le signe du membre de droite. La figure représente les deux fonctions x et x^2 . On constate que x^2 devient plus grand que x lorsque $x > 1$. Le signe du membre de droite change et conduit à l'instabilité.

Remarque : Contrairement aux systèmes linéaires, la stabilité peut dépendre des conditions initiales. Le signe devant le terme x ou x^2 est fondamental. En effet, $\dot{x} = x$ est un système instable, car la solution $x(t) = x_0 e^t$ et diverge lorsque $t \rightarrow \infty$. Par contre $\dot{x} = -x$ est stable. La solution $x(t) = x_0 e^{-t}$ converge vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Ainsi, dans l'équation différentielle (1.9), le terme x^2 a une tendance à déstabiliser le système, et $-x$ à le stabiliser. La stabilité est garantie pour autant que le terme $-x$ domine x^2 pour x positif, ce qui est le cas lorsque $x < 1$.

1.6 Points d'équilibre isolés multiples

Soit le système décrit par

$$\dot{x} = -x + x^2 = x(x - 1) \quad (1.12)$$

Il y a deux points d'équilibre : $x = 0$ et $x = 1$, ceci est à mettre en perspective avec le cadre des systèmes linéaires, pour lesquels, lorsque le point d'équilibre est isolé, alors il est unique. En effet, la condition d'équilibre pour un système $\dot{x} = Ax$ est $Ax_{eq} = 0$. Lorsque A est inversible (i.e. $|A| \neq 0$) le point d'équilibre est unique et correspond à $x_{eq} = 0$. Lorsque la matrice A est singulière alors le *noyau* est un sous-espace vectoriel et donc les points d'équilibre multiples sont connectés. Ainsi dans ce cas, si $x_{eq} \neq 0$ et $x_{eq} \in \{x \mid Ax = 0\}$ alors $\alpha x_{eq} \neq 0$ est aussi un point d'équilibre $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.

1.7 Explosion en temps fini

Dans le cas linéaire, l'instabilité est toujours bornée par une exponentielle. Par exemple $\dot{x} = 3x$ tend vers l'infini sans jamais dépasser une exponentielle $x(t) < x_0 e^{3.01t}$. La raison de ceci ne tient au fait que l'expression de la dérivée peut être bornée par une quantité proportionnelle à la valeur de l'état. La constante de proportionnalité donne la vitesse de l'exponentielle.

Système linéaire : Instabilité bornée par une exponentielle.

$$x = 3x \xrightarrow{\text{yields}} \chi(x_0, t) = x_0 e^{3t} < x_0 e^{3.01t} \quad (1.13)$$

Dans le cas non linéaire : des surprises peuvent se produire. Par exemple, pour le système suivant

$$\dot{x} = -x + x^2 \quad (1.14)$$

La divergence vers l'infini est beaucoup plus rapide que dans le cas linéaire. La solution analytique de cette équation est

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})} \quad (1.15)$$

La solution diverge vers l'infini en un temps fini, lorsque $x_0 > 1$ et $t \rightarrow 1$

1.8 Cycle limite

Oscillations en sortie sans qu'il y ait de signal externe présent. Ces oscillations que l'on appelle des cycles limites sont illustrées ici à travers un exemple très connu dû à Van der Pol

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad (1.16)$$

Où m , c et k sont des constantes positives. Elle peut représenter par exemple une masse avec un ressort avec un amortissement dépendant de la position de la masse $2c(x^2 - 1)$.

- Pour des valeurs assez grandes de x , l'amortissement est positif et la dissipation d'énergie a tendance à ramener la position vers zéro.
- Pour des valeurs de x petites; l'amortissement est négatif et apporte de l'énergie x a tendance à s'éloigner de zéro. Ainsi pour certaines valeurs de x le système s'éloigne de zéro et pour d'autres s'en rapproche.

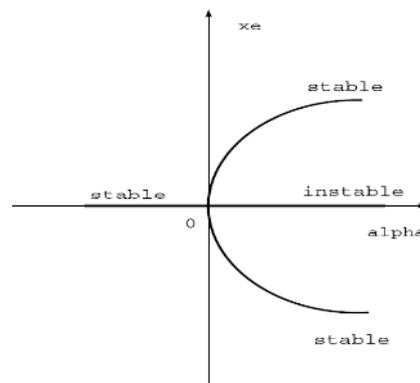
Ce type de comportement est présent dans de nombreux phénomènes physiques.

1.9 Bifurcation

Dans un système non linéaire, les paramètres peuvent varier pour de multiples raisons. Avec ces changements, il arrive parfois que le nombre et la nature des points d'équilibre changent. Les valeurs particulières des paramètres pour lesquelles ces changements se produisent sont appelées des valeurs **critiques** ou de **bifurcation**. Un exemple est donné par le modèle suivant que l'on appelle équation de Duffing

$$\dot{x} + \alpha x + x^3 = 0 \quad (1.17)$$

Si l'on trace les point d'équilibre en fonction de α



1.10 Orbites chaotiques

On considère le système

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = u = 6\sin(t) \quad (1.18)$$

Deux trajectoires sont représentées, l'une correspondant à la condition initiale $x_0 = (0.1, 0.2)^T$ et l'autre à $x_0 = (0.105, 0.2)^T$. On constate que même si les deux conditions initiales sont très proches l'une de l'autre, les trajectoires résultantes sont rapidement très différentes, sans pour autant devenir non bornées (les valeurs de la position x demeurent dans un intervalle fermé et borné). Cette hypersensibilité aux conditions initiales et l'aspect presque imprévisible du résultat donne l'impression que le système est soumis à des perturbations aléatoires. Le système est parfaitement déterministe.

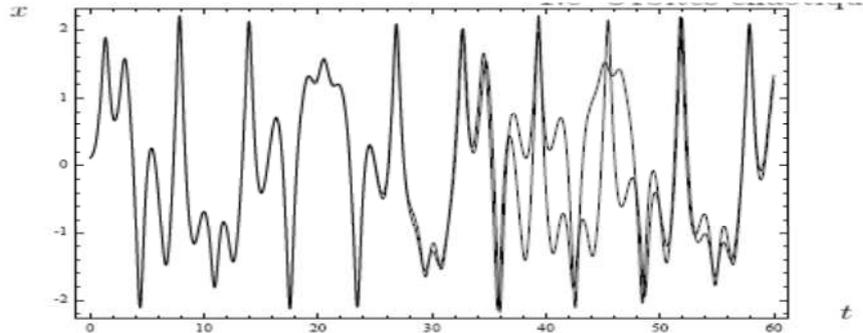


Figure 1.6: Les solutions de l'équation différentielle $\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = u = 6\sin(t)$ sont représentées pour deux conditions initiales proches ($x(0) = 0.1$, et $x(0) = 0.105$; $\dot{x}(0) = 0.2$ pour les deux cas. Bien que les trajectoires résultantes sont proches dans la première portion horizontale, elles deviennent très différentes dans la deuxième portion horizontale du graphique.

Un tel comportement est appelé "chaos". Comme exemple supplémentaire, considérons l'oscillateur de Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - zx \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1.19)$$

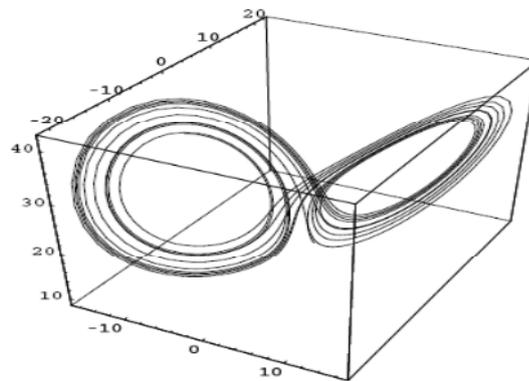
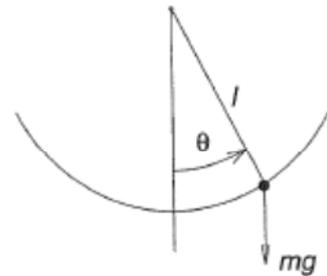


Figure 1.7: Orbite chaotique de l'oscillateur de Lorenz pour $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

Où seuls les deux termes en bleu, zx d'une part, et xy d'autre part, chacun produits de deux états, sont responsables de la nature non linéaire de la dynamique. Les paramètres σ , b , r sont fixes.

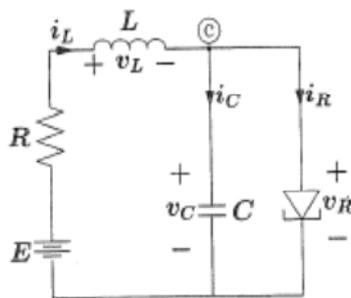
1.11 Exemples et applications

1.11.1 Les équations d'un pendule



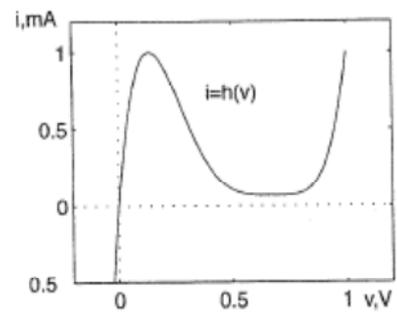
Pendule

1.11.2 Circuit du tunnel de diode



(a)

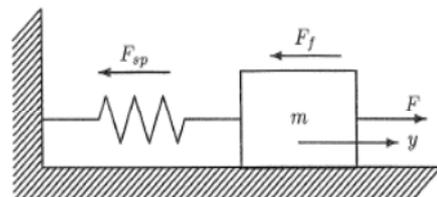
a) Circuit,



(b)

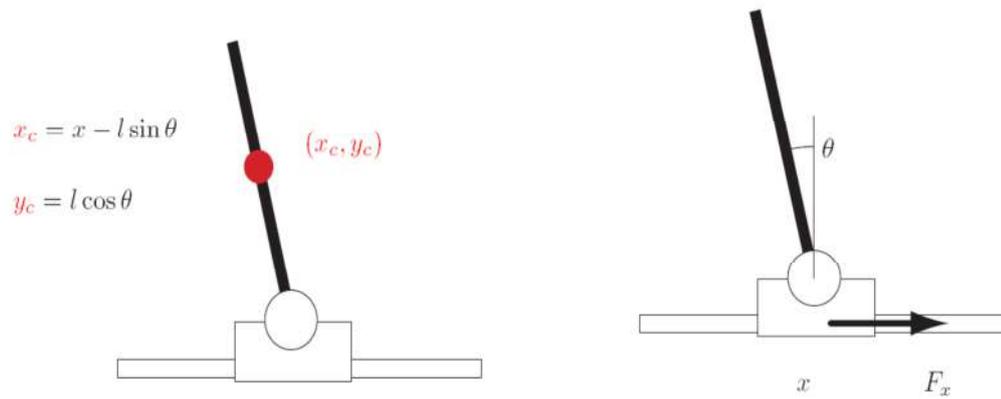
b) caractéristique $v_R - i_R$

1.11.3 Système masse-ressort



Système masse-ressort

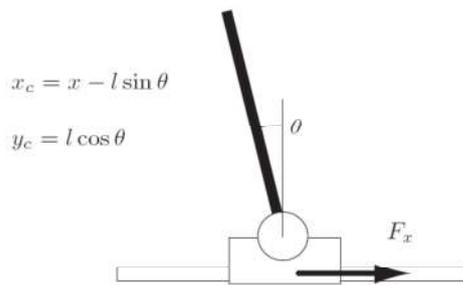
1.11.4 Pendule inversé



$$x_c = x - l \sin \theta$$

$$y_c = l \cos \theta$$

$$L = E_c - E_p$$



$$x_c = x - l \sin \theta$$

$$y_c = l \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

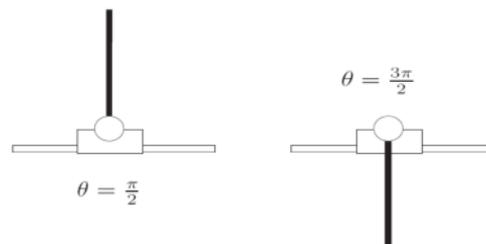
$$E_c = \frac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + M\dot{x}^2 + m\dot{x}_c^2 + m\dot{y}_c^2)$$

$$E_p = mg \cos \theta$$

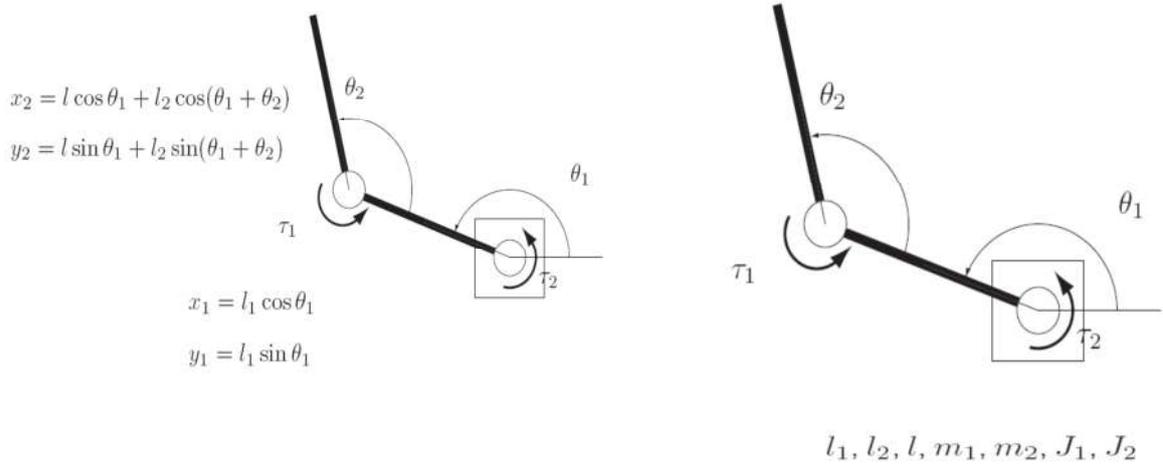
$$\begin{pmatrix} M + m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & J + ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ mg \sin \theta \end{pmatrix}$$

Exemple sur la présence de plusieurs équilibres isolés

$$\begin{pmatrix} M + m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & J + ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ mg \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



1.11.5 Robot planaire



$$E_p = mgy_1 + mgy_2$$

$$E_c = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}J_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, 2$$

$$\begin{pmatrix} I_1 + 2I \cos \theta_2 & I_2 + I \cos \theta_2 \\ I_2 + I \cos \theta_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = -g[(m_1l_1 + m_2l) \cos \theta_1 + m_2l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] - 2I \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - I \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \tau_1$$

$$v_2 = -gm_2l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + I \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \tau_2$$

$$I_1 = J_1 + J_2 + m_2l_1^2 + m_2l_2^2$$

$$I_2 = J_2 + m_2l_2^2$$

$$I = m_2l_2l$$

1.11.6 Oscillateur non linéaire

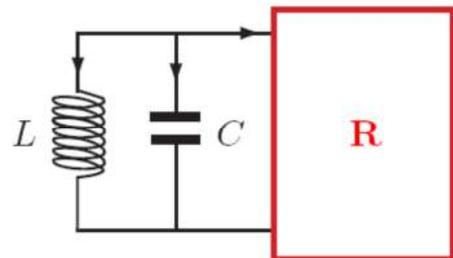
$$u_c = u_l = u_r$$

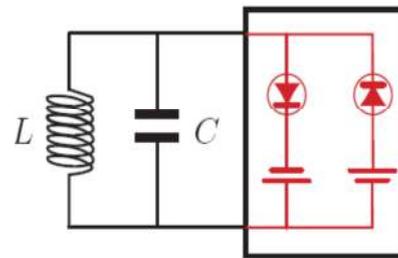
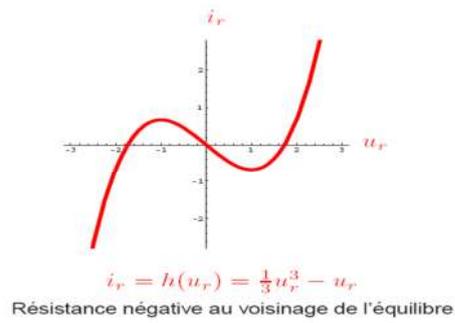
$$i_r = -i_c - i_l$$

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$

$$u_l = L \frac{di_l}{dt}$$

$$i_r = h(u_r)$$





Elément Actif

$$i_l = -i_r - i_c$$

$$u_l = L \frac{di_l}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(-h(u) - C \frac{du}{dt} \right)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \sqrt{LC} \frac{du}{dt}$$

$$h(u) = h(x) = \frac{1}{3}x^2 - x, \quad \epsilon = \sqrt{L/C}$$

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

Equation de Van der Pol

CHAPITRE 2 : DIAGRAMME DE PHASE

2.1 Introduction

- La méthode du plan de phase est spécifiquement adaptée à l'étude des systèmes d'ordre deux comportant une non linéarité. Il s'agit d'une méthode d'analyse graphique et temporelle de l'évolution du système.
- Méthode rigoureuse basée sur l'analyse des trajectoires dans l'espace d'état.

2.2 Plan de phase pour les systèmes du second ordre

Pour les systèmes du second ordre donnés par

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x) \quad (2.1)$$

Définition des variables d'état

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

Solution, variables

$$x = G_x(t) \text{ et } \dot{x} = G_{\dot{x}}(t) \quad (2.2)$$

Telles que

$$\frac{dG_{\dot{x}}}{dt} = f(G_x(t), G_{\dot{x}}(t)) \quad (2.3)$$

Solution, variables

$$x_1(t) = \chi_1(t)$$

$$x_2(t) = \chi_2(t)$$

$$\frac{d\chi_2(t)}{dt} = f(\chi_1(t), \chi_2(t)) \quad (2.4)$$

Exemple 2.1



$$k = 1 \quad m = 1$$

Fig. 2.1 : système masse-ressort.

Afin d'illustrer les techniques de tracés des orbites dans le plan de phase, le système simple (masse-ressort) est utilisé :

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (2.5)$$

C'est l'équation dynamique d'un système mécanique comportant un ressort parfait à l'extrémité duquel se situe une masse. L'ensemble forme un oscillateur mécanique. Les paramètres sont normalisés à l'unité. La représentation schématique est donnée à la Fig. 2.1. $k=1$ $m=1$.

2.3 Techniques de représentation du plan de phase

Plusieurs techniques sont disponibles pour représenter les orbites des trajectoires d'un système dynamique à deux états. Certaines consistent à représenter exactement le tracé, d'autres à n'obtenir qu'une information partielle concernant celles-ci, par exemple en ne représentant que l'information concernant la direction de la tangente en plusieurs points du plan de phase. Les méthodes suivantes seront détaillées :

1) Méthodes informatiques

- Solutions numériques pour diverses conditions initiales
- Graphe des pentes

2) Méthode de résolution des équations différentielles

- a) en éliminant le temps explicitement
- b) en éliminant le temps implicitement

3) Méthodes mixtes

- Méthode des isoclines

2.4 Systèmes linéaires autonomes du second ordre

Un système linéaire autonome du second ordre ne comporte pas d'entrée et est représentable par un modèle comportant deux états.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Que l'on peut la représenter sous la forme matricielle

$$\dot{x} = Ax \quad (2.7)$$

Avec $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Les trajectoires d'un tel système peuvent être représentées dans le plan par des courbes paramétrées par le temps. Les trajectoires possibles qui varient en fonction de la valeur numérique des paramètres a_{ij} peuvent être regroupées en catégories en fonction de la nature des valeurs propres de la matrice A .

Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres obtenues en résolvant $\det(A - \lambda I) = 0$. Quatre cas sont à distinguer :

- 1) Les valeurs propres sont toutes les deux réelles et de même signe, c'est un **nœud**.
Lorsque les signes sont négatifs, le nœud est stable, sinon il est instable.
- 2) Elles sont réelles mais de signe opposé. C'est un point **selle**.
- 3) Elles sont purement imaginaires. C'est un **centre**.
- 4) Elles sont complexes conjuguées. C'est un **foyer**.

Matrice A a pour valeurs propres et forme de Jordan

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow J_r = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow J_r = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$J_r = M^{-1}AM \quad (2.10)$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \rightarrow J_r = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

M est une matrice formée par les vecteurs propres de matrice.

$$x(t) = Me^{Jr t}M^{-1}x_0 \quad (2.12)$$

Dynamique en coordonnées modales

$$z = M^{-1}x \rightarrow \dot{z} = M^{-1}\dot{x}$$

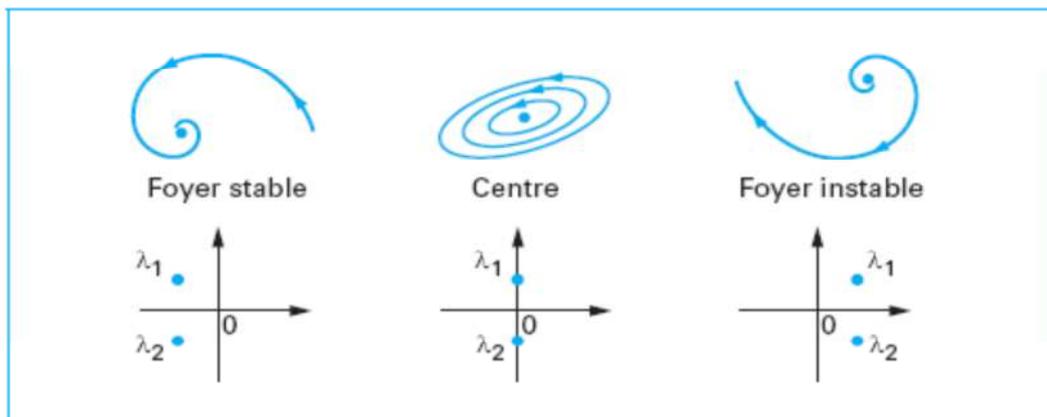


Fig.2.2 : Portraits de phases en fonction des valeurs propres de A ayant une partie imaginaire non nulle

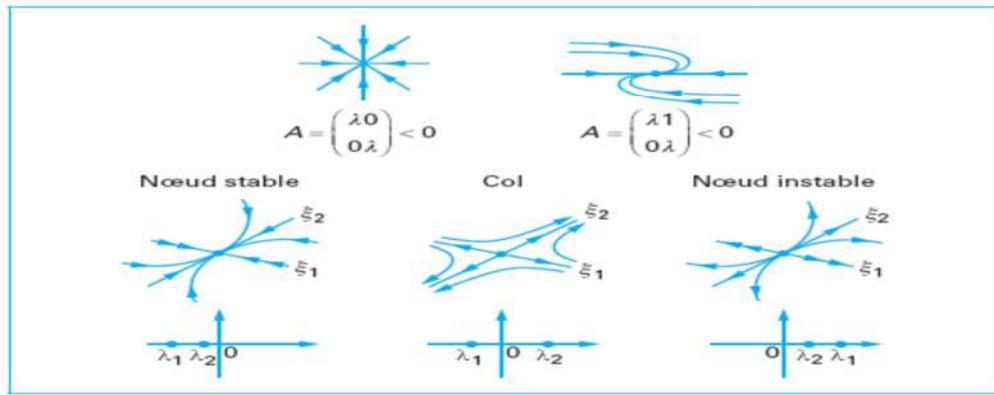


Fig.2.3 : Portraits de phases lorsque les valeurs propres de A , sont réelles (vecteurs propres de A , lorsqu'ils existent)

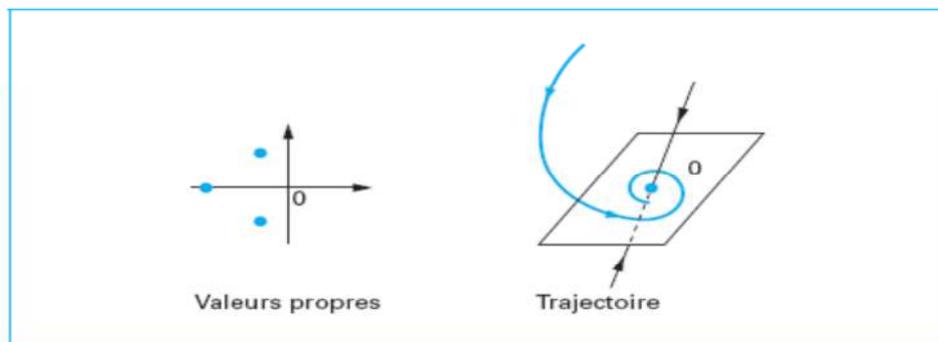


Fig.2.4 : Exemple de portraits de phases d'un système linéaire de dimension 3 en fonction des valeurs propres de A

Cas particulier : valeur(s) propre(s) nulle(s), le noyau de la matrice $A =$ ensemble des points d'équilibre

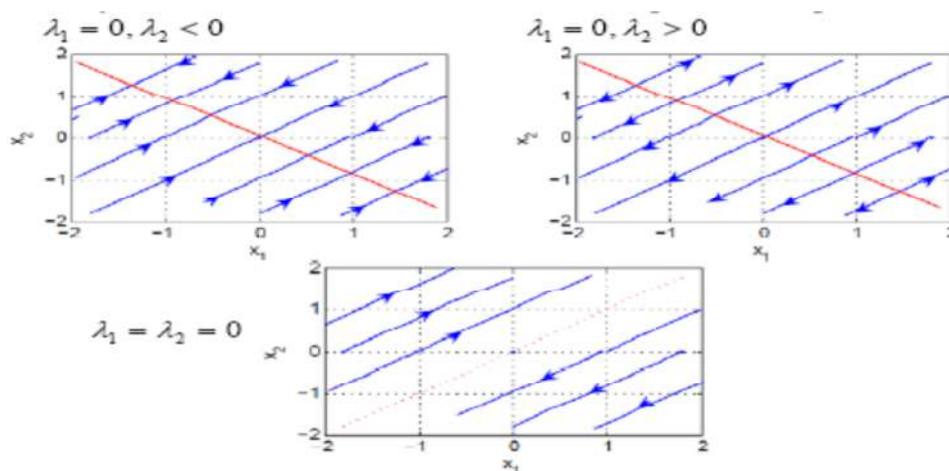


Fig. 2.5 : Cas particulier au moins une des valeurs égale à zéro

2.4.1 Comportement des systèmes non linéaires

Point d'équilibre multiple : exemple d'un pendule simple

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g \sin(x_1)}{l} - x_2/m \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\dot{x}(t) = f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\bar{x}_1) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

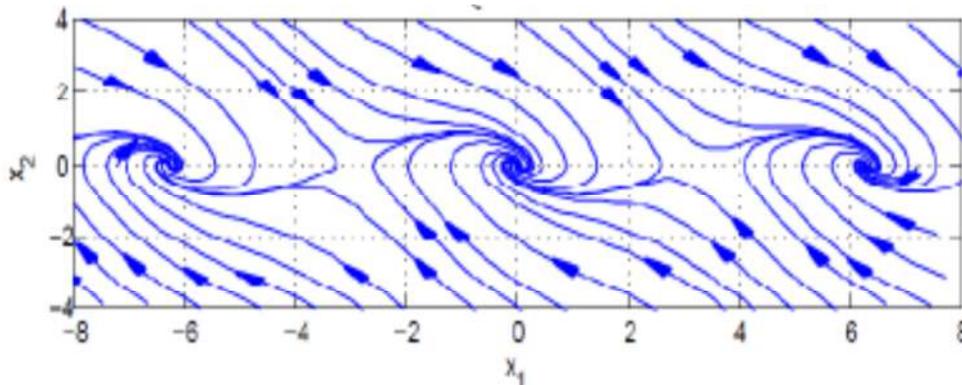


Fig. 2.6 : Trajectoires simulées du pendule simple.

2.5 Méthodes de représentation du plan de phase

2.5.1 Solutions numériques

Les logiciels d'aide au calcul différentiels qu'ils soient orientés vers le calcul formel (Maple, Mathematica, Reduce) ou vers le calcul numérique (Matlab, SysQuake, LME, Scilab) possèdent un solveur d'équations différentielles ordinaire. Il est alors très aisé d'obtenir les solutions d'un système dynamique planaire en y changeant les conditions initiales d'une simulation à l'autre rendant ainsi la possibilité d'y révéler la nature des orbites sous-jacentes. Dans le cas du système masse-ressort précédemment d'écrit nous pourrions obtenir la représentation donnée à la figure suivante :

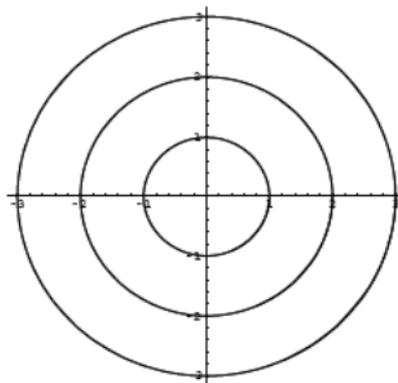


Fig. 2.7 : Trajectoires simulées du système masse-ressort.

2.5.2 Graphe des pentes

Autrefois, l'ordinateur faisait défaut et la détermination de solutions ne pouvaient pas procéder par une méthode inductive comme celle de Runge-Kutta étant donné le nombre d'opérations prohibitif que cela impliquerait.

Ainsi, il était plus commode de ne calculer qu'un certain nombre de pentes en des points prédéterminés du plan de phase. Les pentes sont obtenues en évaluant $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$ puis en représentant un petit segment de droite ayant une dénivelée $f_2(x_1, x_2)$ sur une distance horizontale $f_1(x_1, x_2)$ au point (x_1, x_2) . La longueur du segment peut soit être proportionnel à la norme de f ou fixé à une longueur unitaire arbitraire. Ironiquement, l'ordinateur est ici aussi d'une grande aide. En prenant une grille équidistribuée selon les deux axes x_1 et x_2 , on obtient une représentation donnée à la figure ci-dessous pour le système masse-ressort.

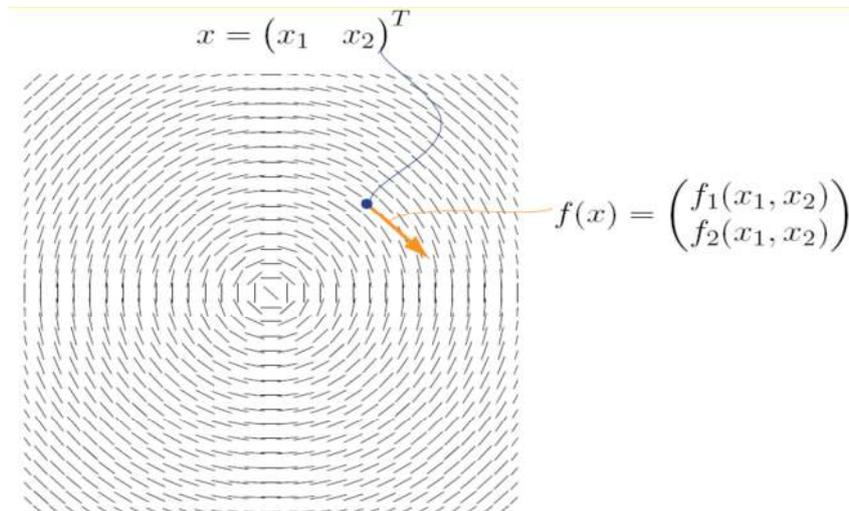


Fig. 2.8: Graphique des éléments de pente pour le système masse-ressort.

2.5.3 Elimination du temps explicitement

Lorsque le système dynamique est relativement simple comme c'est le cas du système masse ressort, il est envisageable d'obtenir la solution de manière explicite à l'équation différentielle décrivant la dynamique.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x_0 \sin(t) + \dot{x}_0 \cos(t) \\ \dot{x}(t) = -x_0 \sin(t) + \dot{x}_0 \cos(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

Cependant il est nécessaire de se débarrasser de la paramétrisation du temps afin de représenter l'orbite. En utilisant l'identité $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, il est possible d'exprimer la relation

$$\dot{x}^2 + \dot{x}^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2 \quad (2.16)$$

qui représente un cercle centré en $(0, 0)$ de rayon $\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2}$

2.5.4 Elimination du temps implicitement

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \frac{dx_1}{dt} \\ \dot{x}_2 &= -x_1 = \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_1}{x_2} &= -\frac{dx_2}{x_1} = dt \\ \int x_2 dx_2 &= -\int x_1 dx_1 \\ x_1^2 + x_2^2 &= c = x_{10}^2 + x_{20}^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

La relation avec le paramétrage temporel est perdue

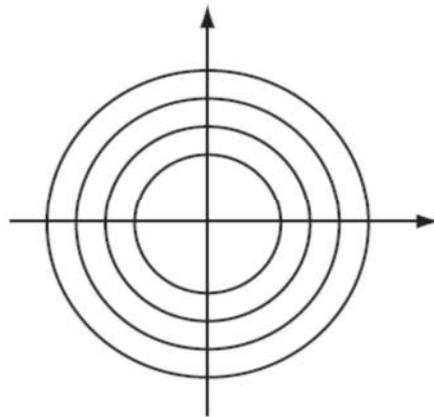


Fig. 2.9: Graphique de l'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1 = x_{10}^2 + x_{20}^2$

2.5.5 Méthode des isoclines

La méthode graphique des pentes a procédé par l'évaluation sur une grille donnée a priori et de géométrie arbitraire. Il est intéressant de se demander s'il y a une possibilité de trouver un lieu de points, le long duquel il serait plus intéressant de calculer les pentes.

Par exemple, afin de minimiser le nombre d'évaluation, il serait intéressant de calculer l'ensemble de points auquel le champ de vecteur de la dynamique ait une pente commune. En variant la pente, il est alors possible d'obtenir un ensemble de lieux.

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \alpha = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \\ \ddot{x} + x &= 0 \\ \alpha &= -\frac{x_1}{x_2} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{\alpha} x_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pour $\alpha = 1$, $x_2 = -x_1$

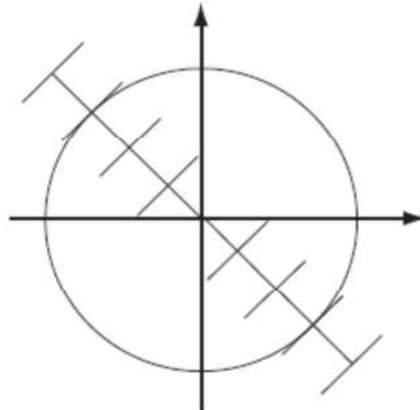


Fig.2.10 : La méthode des isoclines consiste à choisir un élément de pente et de représenter le lieu des points comportant la même pente.

Exemple 2.1: Oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2.19)$$

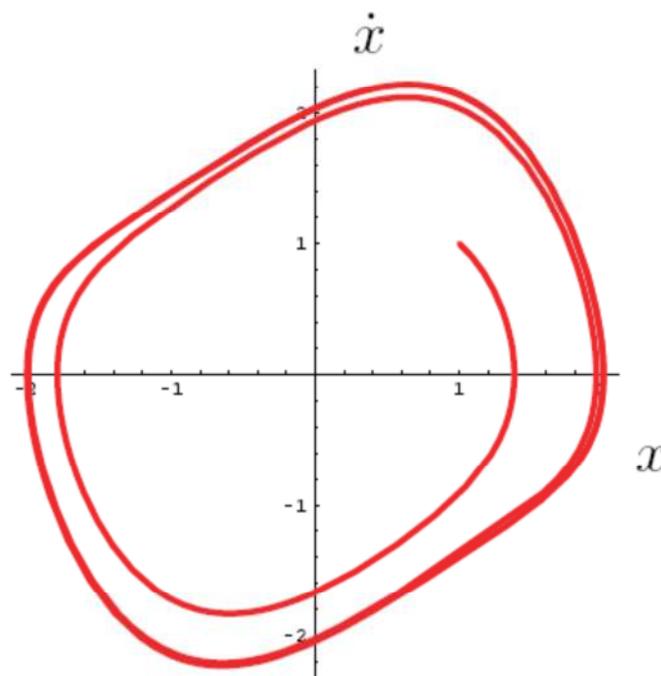


Fig.2.11: Une trajectoire de l'oscillateur de Vander pol est représentée pour la condition initiale $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$ et pour la valeur du paramètre $\varepsilon = 0.5$.

Grphe des pentes : avantageux lors d'un grand nombre de conditions initiales

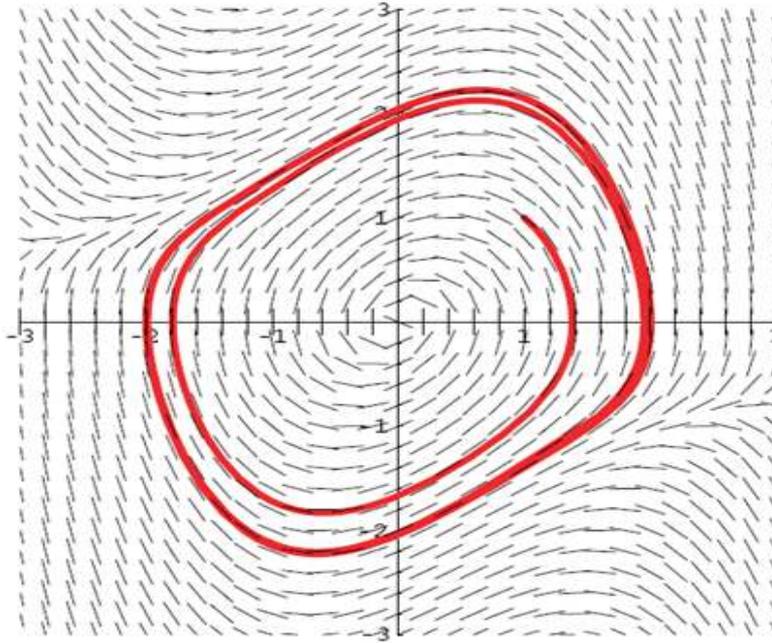


Fig. 2.12 : Grphe des pentes pour différentes conditions initiales

Méthode des isoclines :

$$\alpha = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\epsilon(x^2 - 1) - \frac{x}{\dot{x}}$$

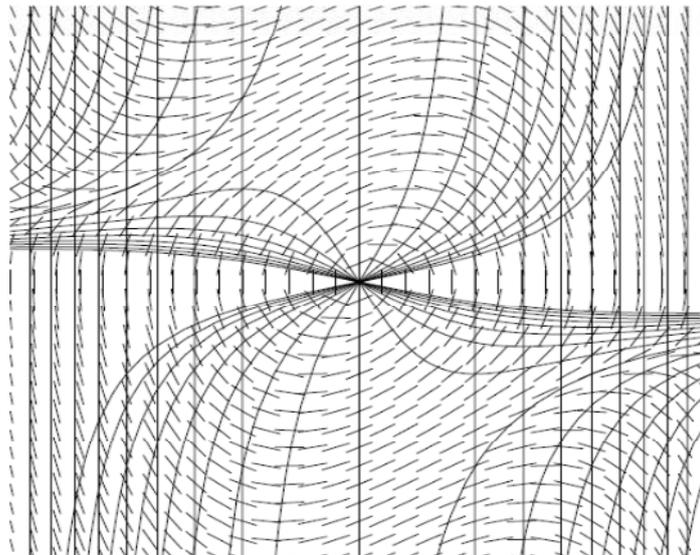


Fig. 2.13 : Isoclines pour différentes valeurs de α

2.6 Cycles limites

2.6.1 Définition

Un système $\dot{x} = f(x)$ possède un cycle limite C s'il existe un intervalle de temps $[t_0, t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in C$, tel que en désignant par $\mathcal{X}(x_0, t)$ la solution de système avec pour condition initiale $x(t_0) = x_0 = \mathcal{X}(x_0, t_0)$ on ait :

- $\mathcal{X}(x_0, t) \in C, \forall t \in [t_0, t_0 + T[$
- $\mathcal{X}(x_0, t_0 + T) = \mathcal{X}(x_0, t_0)$.

2.6.2 Classification des cycles limites

Définition : Un cycle limite C est dit :

Stable: si toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle $\rightarrow C$.

Instable: si toutes les trajectoires divergent de C .

Semi-stable: si certaines trajectoires convergent vers C .

2.6.2.1 Index topologique

L'index est une propriété topologique des systèmes en rapport avec une région déterminée du plan de phase. Elle est invariante pour des petites perturbations continues des systèmes considérés.

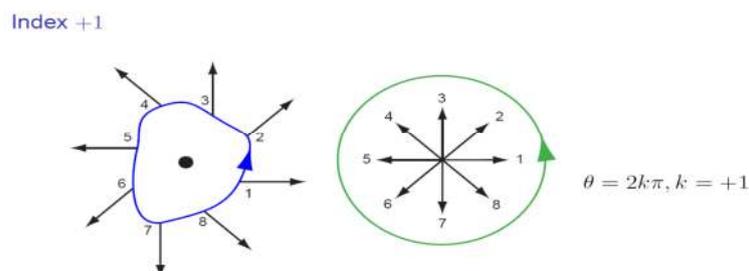
Définition : (Index en un point du plan de phase)

- 1) Une courbe entourant le point est choisie de manière arbitraire, mais elle est comprise dans un disque de taille suffisamment petite. Théoriquement le disque est infinitésimal.
- 2) Une paramétrisation de la courbe dans le sens trigonométrique positif.
- 3) Une suite arbitraire de points de la courbe, $(x_i, i = 1 \dots n)$, avec $x_n = x_1$. On calcule la suite $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$. On représente ces vecteurs avec une origine commune.

Définition

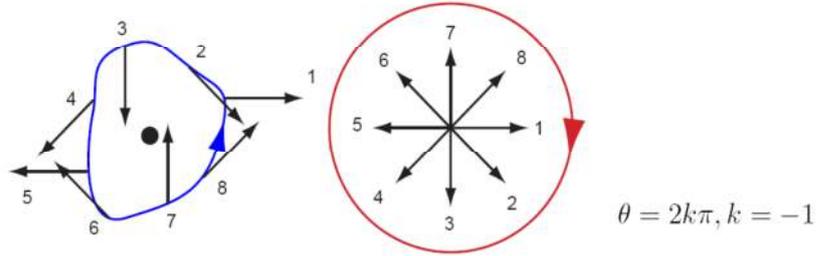
L'index mesure alors l'angle modulo 2π que l'extrémité des vecteurs f_i parcourt dans le sens trigonométrique positif.

Exemple 2.2



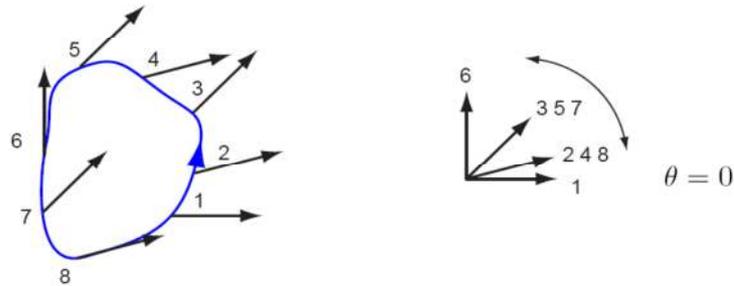
Exemple 2.3

Index -1



Exemple 2.4

Index 0



2.6.2.2 Théorèmes de l'index

Théorème 2.1 : (Théorème de l'index de Poincaré)

Soit N le nombre de nœuds, centres et de foyers et S le nombre de points selles. Si un cycle limite existe, les points singuliers (points \bar{x} tels que $f(\bar{x}) = 0$) que le cycle encercle sont tels que $N = S + 1$.

Théorème 2.2 (Somme des index)

Soit une courbe particulière donnée. L'index de cette courbe est la somme des index de tous les points d'équilibre compris à l'intérieur de cette courbe.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \tag{2.20}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Théorème 2.3 (Théorème de Bendixson)

Pour un tel système, aucun cycle limite ne peut exister dans une région Ω du plan de phase dans laquelle

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{2.21}$$

ne s'annule pas ni ne change de signe.

Démonstration

C'est une conséquence du théorème de Stocks

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2$$

$$dt = \frac{f_1}{dx_1} = \frac{f_2}{dx_2} \quad (2.22)$$

$$\omega = -f_1 dx_2 + f_2 dx_1 \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) s'annule le long du cycle.

$$\oint \omega = \iint d\omega \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \oint -f_1 dx_2 + f_2 dx_1 \\ &= \iint \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \right) \\ &= -\iint \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le théorème est vérifié

Théorème 2.4

Si une trajectoire demeure dans une région finie alors une des trois propositions suivantes est vraie ;

- *la trajectoire va vers un équilibre*
- *la trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.*
- *la trajectoire est elle même un cycle limite.*

CHAPITRE 3 : STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a fait appel à la notion de la stabilité, sans pour autant en donner une définition formelle et des résultats rigoureux relatifs à cette question. En effet, la stabilité de cycle limite, bien que présentée à l'aide du concept de stabilité BIBO. La stabilité y était considérée comme la capacité du cycle limite de se maintenir même après perturbation de celui-ci. Ce type de stabilité sera appelé asymptotique. Le présent chapitre donne les nuances entre les types de stabilité ainsi qu'un traitement approfondi du concept, et des résultats relatifs. Il ne s'occupera que de l'analyse d'un point d'équilibre. Les concepts pourront alors être étendus à la notion de cycle limite sans trop de difficulté.

3.2 Point d'équilibre

Soit donc un système,

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

et un point d'équilibre x_{eq} de telle sorte que,

$$\dot{x}_{eq} = f(x_{eq}) = 0 \quad (3.2)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état. Un point d'équilibre est une valeur de l'état x_{eq} telle que lorsque l'argument x de $f(x)$ est remplacé par x_{eq} , alors $f(x)$ s'annule :

3.3 Stabilité pour les systèmes linéaires

Considérons un système linéaire avec entrée $\dot{x} = Ax + Bu$ suivi d'un bouclage $u = -Kx$: de telle sorte que le système en boucle fermée s'écrive

$$\dot{x} = (A - BK)x = \tilde{A}x \quad (3.3)$$

\tilde{A} ne soit pas singulière $\Rightarrow x_{eq} = 0$ est un point d'équilibre unique

3.3.1 Critère de stabilité (système linéaire)

$$\dot{x} = \tilde{A}x \text{ Stable asymptotiquement} \Leftrightarrow R(\lambda_j(\tilde{A})) < 0$$

$$\dot{x} = \tilde{A}x \text{ Stable } 0 \Leftrightarrow R(\lambda_j(\tilde{A})) \leq 0$$

3.4 Définition intuitive de la stabilité

3.4.1 Définition

Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre.



Figure 3.1 : Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

3.5 Définition mathématique précise de la stabilité

3.5.1 Notion de distance

Il faut rendre mathématiquement précis ce que l'on entend par "proche" et "légèrement".

Un espace vectoriel V est dit normé lorsqu'il existe une fonction $x \rightarrow \|x(t)\|$ de V dans \mathbb{R} avec les propriétés suivantes :

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$; et $\|x\| \rightarrow 0$ seulement lorsque $x = 0$
- 2) $\|cx\| = |c|\|x\|, \forall x \in V$ et $\forall c \in \mathbb{R}$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$

Exemples 3.1

Dans un espace vectoriel \mathbb{R}^n , les normes suivantes sont définies :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{3.4}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \tag{3.5}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| \tag{3.6}$$

Avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$

3.5.2 Stabilité: définition formelle

3.5.2.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Le point d'équilibre $x = 0$ est stable lorsque

$$\forall R > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall x_0, \|x_0\| < r \Rightarrow \|\chi(x_0, t)\| < R, \forall t \geq 0$$

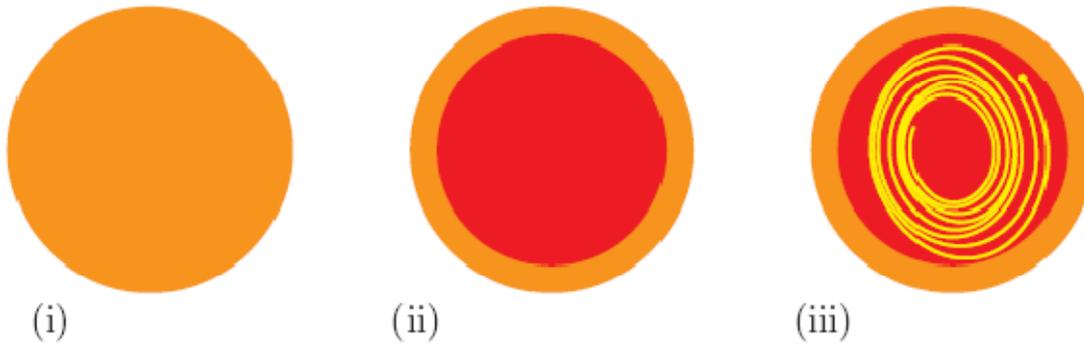


Figure.3.2 : Illustration de la définition formelle de la stabilité. (i) Pour tout choix de la boule d'exigence $\|x\| < R$, il doit être possible de construire (ii) une sous boule de conditions initiales $\|x_0\| < r$, telle que (iii) pour toute condition initiale appartenant à cette sous boule, la trajectoire résultante reste emprisonnée dans la grande boule de taille R .

$$(i) \forall R > 0, (ii) \exists r > 0; (iii) \forall x_0, \|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R \tag{3.7}$$

Ceci corrobore la définition intuitive de la stabilité. En effet, en considérant la **bille captive** dans un **bol**, une hauteur de référence arbitraire de la bille peut être considérée comme étant une mesure de la boule d'exigence R . Maintenant, s'il existe toujours une certaine hauteur suffisamment petite (correspondant à r), de telle sorte que, si la bille est lâchée à n'importe quelle hauteur comprise dans l'intervalle défini par cette hauteur (associée à r), elle ne pourra jamais dépasser la hauteur d'exigence de référence (associée à R), alors la bille sera stable au sens de Lyapunov. Ceci ne signifie pas pour autant que la bille revienne asymptotiquement à son point d'équilibre. Ainsi, la bille est stable dans le cas d'un bol **concave** et instable lorsque le bol est **convexe**.



Figure.3.3 : Lorsque le système est instable (à gauche), quel que soit le choix de la boule de conditions initiales de rayon r , certaines trajectoires résultantes ressortent toujours de la boule d'exigence de rayon R . Ceci n'est pas le cas pour le système stable (à droite)

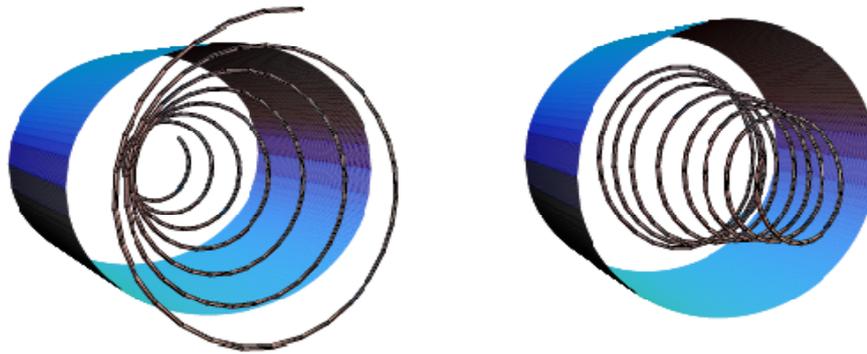


Figure.3.4. Lorsque l’axe du temps est utilisé pour représenter les solutions de l’équation différentielle $\dot{x} = f(x)$, la boule d’exigence devient un cylindre. On constate alors clairement que lors de l’instabilité, il n’est pas possible de confiner toutes les trajectoires à l’intérieur du cylindre pour toute boule de conditions initiales à l’intérieur de celui-ci.

3.5.3 Instabilité

Un système est instable au sens de Lyapunov lorsqu’il n’est pas stable au sens de Lyapunov.

En effet, il existe des systèmes qui convergent asymptotiquement vers un point d’équilibre quelles que soient les conditions initiales, sans pour autant que ces systèmes puissent être considérés comme stables

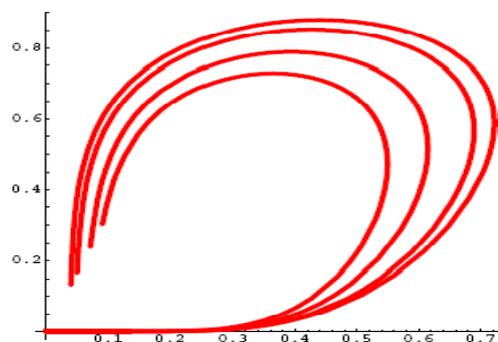


Figure 3.5 : Exemple d’un système converge mais instable.

Exemple : Soit le système planaire de Hahn,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)[1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)[1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]} \end{cases} \quad (3.8)$$

Plusieurs solutions pour différentes conditions initiales sont représentées à la figure 3.5. Les trajectoires, bien que commençant près de l’origine, s’en écartent pour finir par y revenir le long de l’axe horizontal. Il s’agit donc bien d’une convergence asymptotique. Cependant, le

système est instable étant donné que les trajectoires ne peuvent pas être contraintes à demeurer dans une boule de taille suffisamment petite, quel que soit la proximité des conditions initiales de l'origine.

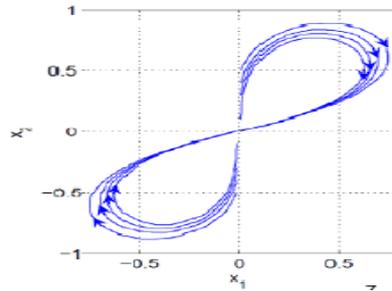
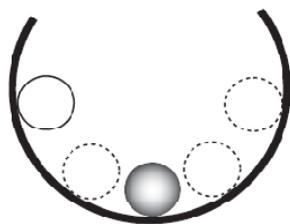


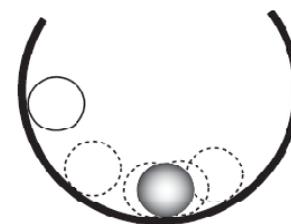
Figure 3.6 : plan de phase d'un système converge mais instable.

Remarque : la convergence de la solution vers le point d'équilibre n'implique pas la stabilité.

3.5.4 Stabilité asymptotique



sans frottement



avec frottement

Figure 3.7: A gauche stabilité. A droite, stabilité asymptotique

Définition de la stabilité asymptotique

- Le point d'équilibre est stable au sens de Lyapunov. (stabilité)
- Il existe une boule de taille r_0 telle que $\forall x_0 \setminus \|x_0\| < r_0 \Rightarrow x \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. (convergence asymptotique).

3.5.5 Désavantages de la définition :

La définition de stabilité présente certains désavantages importants :

1. Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.
2. Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations dynamiques seraient les bienvenus.

3.6 Méthode directe de Lyapunov

Lorsque la bille est examinée selon un point de vue différent, on constate que le comportement stable ou instable de celle-ci est relié à la fois à la caractéristique et à l'évolution de sa fonction d'énergie. La présence d'un maximum ou minimum d'énergie potentielle possède une influence critique. De plus, la présence de frottement est responsable de la décroissance de l'énergie complète (cinétique et potentielle) et influence donc la stabilité.

La bille possède donc une fonction d'énergie E qui comporte une part d'énergie potentielle E_p et une part d'énergie cinétique E_c . On a $E = E_c + E_p$.

3.6.1 Le comportement est stable lorsque :

- L'énergie E diminue et est minimum au point d'équilibre.
- L'énergie E est conservée et E est minimum à l'équilibre

3.6.2 Par contre, le comportement est instable lorsque :

- L'énergie E augmente.
- L'énergie E est conservée mais elle ne correspond pas à un minimum à l'équilibre.

La théorie de Lyapunov et en particulier la deuxième méthode de Lyapunov (dite aussi méthode directe) généralise cette constatation à une classe plus large de fonctions. Ces fonctions sont notées V .

3.6.3 Candidat de Lyapunov (Lyapunov candidate function)

La fonction d'énergie possède deux propriétés essentielles. La première est la qualité d'extremum au point d'équilibre, à savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Le point d'équilibre a tendance à être stable lorsque cet extremum est un minimum. Le candidat Lyapunov est une fonction qui présente ce type de particularité.

Une fonction définie positive est une fonction :

- $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- $V(x) = 0 \quad x = 0$

De plus, est une fonction continûment différentiable. On aboutit donc à la définition du candidat de Lyapunov

3.6.4 Fonction de Lyapunov (Lyapunov function)

La deuxième particularité de la fonction d'énergie lors de la présence d'un système stable, est d'avoir tendance à diminuer ou d'être conservé lors de l'évolution du système. En conséquence, on exigera en plus du candidat de Lyapunov que la dérivée de celui-ci soit négative.

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \nabla V^T f(x) \tag{3.9}$$

Définition (Fonction de Lyapunov) : Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue $V(x)$ telle que

- $V(x) > 0 \ \forall x \neq 0; \quad V(x) = 0 \ x = 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \neq 0; \quad \dot{V}(x) = 0 \ x = 0$

3.6.5 Equivalence avec la définition de la stabilité

Le premier résultat en relation avec la fonction de Lyapunov est le résultat de stabilité locale autour du point d'équilibre. Nous énonçons le théorème avec précision :

Théorème 3.1: S'il existe une boule $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$ telle que

$$V(x) > 0 \ (\forall x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}) \text{ et } V(0) = 0$$

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f \leq 0 \text{ dans } \mathcal{B}_{\mathcal{R}_0}$$

Alors le point d'équilibre $x = 0$ est stable au sens de Lyapunov.

Si en plus, $\dot{V}(x) < 0 \ \forall x \neq 0$ alors la stabilité est asymptotique.

Remarque : L'existence d'une fonction de Lyapunov est une condition suffisante pour la stabilité. En plus, une telle fonction n'est pas unique.

3.6.5.1 Interprétation géométrique du théorème de Lyapunov

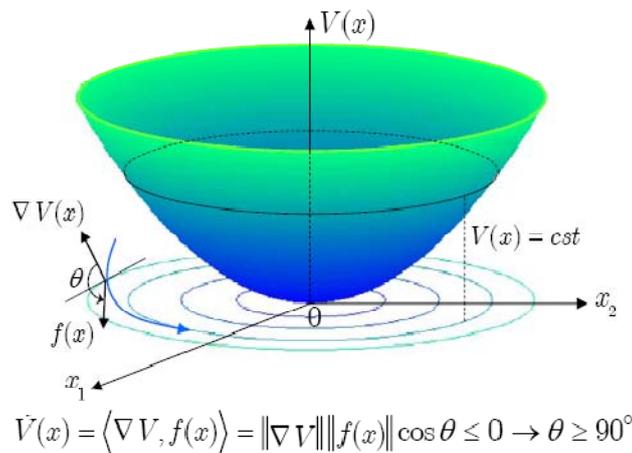


Figure.3. 8 : Courbe en 3 dimensions de V et \dot{V}

3.6.5.2 Définitions préliminaires

Définition : Une sphère de rayon r est notée \mathcal{S}_r , et une boule de même rayon est notée \mathcal{B}_r :

$$\mathcal{S}_r = \{x \mid \|x\| = r\} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{B}_r = \{x \mid \|x\| \leq r\} \quad (3.11)$$



Figure. 3.9 : Différence entre sphère \mathcal{S} et boule \mathcal{B}

La proposition à démontrer consiste à vérifier que quel que soit la grande boule d'exigence $\forall \mathcal{B}_R$, il est toujours possible de trouver une sous-boule de conditions initiales $\exists \mathcal{B}_r$ tel que si le système commence à l'intérieur de cette sous-boule, $x_0 \in \mathcal{B}_r$, alors $x(t) \in \mathcal{B}_R$, $\forall t \geq 0$. La trajectoire doit rester comprise dans la boule de grand rayon comme l'illustre la fig.3.10.

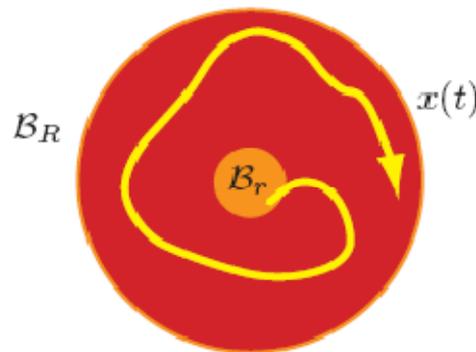


Figure.3. 10 : Trajectoire dans le cas d'un système stable.

Démonstration (stabilité locale) : Pour débiter la démonstration, un rayon R est choisi de manière quelconque. On examine alors la fonction de Lyapunov $V(x)$ sur la sphère de rayon R et on définit son minimum m sur cette sphère \mathcal{S}_R .

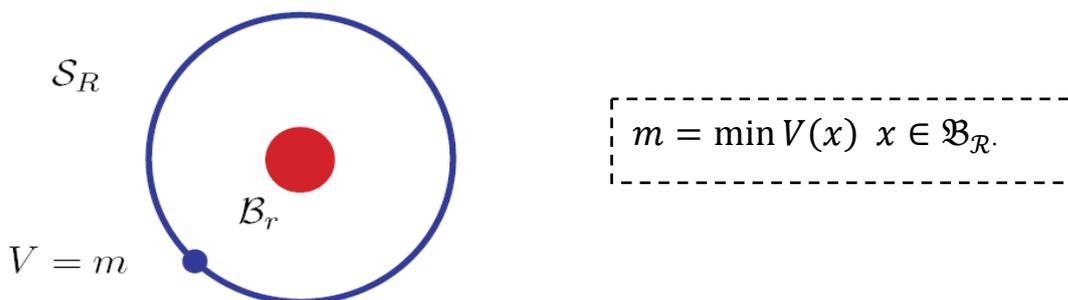


Figure. 3.11 : m représente le minimum de $V(x)$ lorsque x parcourt la sphère \mathcal{S}_R . Le rayon r est alors choisit de telle sorte que $\forall x \in \mathcal{B}_r, V(x) < m$.

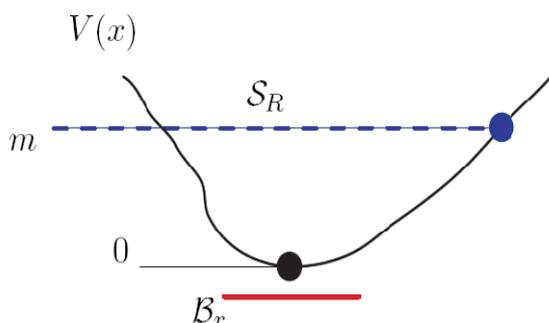


Figure 3.12 : Le choix de \mathcal{B}_r est rendu possible par la continuité de la fonction de Lyapunov et de son annulation au point d'équilibre.

La stabilité (simple) est une conséquence directe

Comme

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq 0 \tag{3.12}$$

il est vrai que :

$$V(x(t)) \leq V(x_0) \quad \forall t \geq 0 \tag{3.13}$$

$$x_0 \in \mathcal{B}_r \Rightarrow V(x_0) < m, V(x(t)) < m \quad \forall t \geq 0 \tag{3.14}$$

La stabilité est donc bien démontrée, car alors $x(t) \in \mathcal{B}_r$

La stabilité asymptotique est plus subtile à établir

La stabilité asymptotique est plus difficile à établir. La fonction de Lyapunov est supposée strictement décroissante, c'est-à-dire que $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(0) = 0$. Puisque $V \geq 0$ et $\dot{V} \leq 0$, la fonction de Lyapunov tend vers une limite le long des solutions de $\dot{x} = f(x)$, c.-à-d. $V(x(t)) \rightarrow L, L \geq 0, t \rightarrow \infty$:

Deux cas sont à envisager

➤ Si $L = 0$ alors $x(t) \rightarrow 0$, étant donné que $V(x)=0$ implique $x = 0$. La stabilité asymptotique est démontrée.

➤ $L > 0$

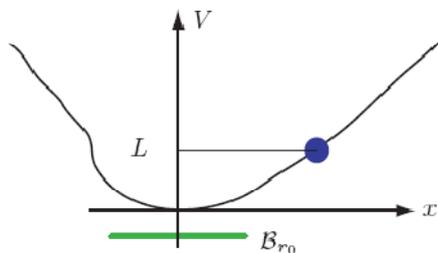


Figure 3.13 : Pour tout point dans \mathfrak{B}_{r_0} , V est garantit inférieur à L .

Considérons $\mathcal{W} = \mathfrak{B}_R \setminus \mathfrak{B}_{r_0}$. Ceci revient à enlever un noyau de taille r_0 de la boule de taille R . Cette région est représentée en rouge à la fig.14. L’hypothèse que $V \rightarrow L$ implique que la trajectoire reste à l’intérieur de cette région.

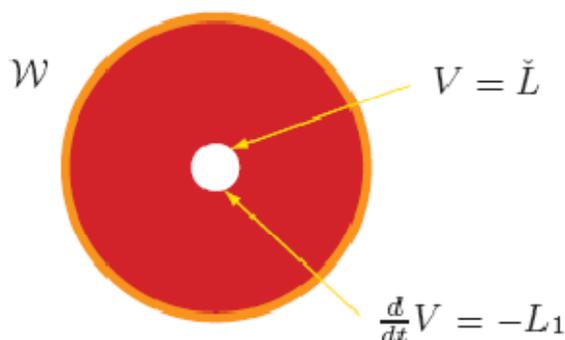


Figure 3.14 : Une boule de taille r_0 est extraite de la boule de taille R . On y définit le minimum de $V = \check{L}$ et la décroissance la plus lente de V .

En se restreignant à la fermeture $\bar{\mathcal{W}}$, il est évident que $0 \notin \bar{\mathcal{W}}$, et que $\bar{\mathcal{W}}$ est un compact (ensemble fermé et borné). De part la compacité, il doit exister un minimum de V noté \check{L} ,

$$\check{L} = \min_{x \in \bar{\mathcal{W}}} V(x) \quad (0 < \check{L} < L) \tag{3.15}$$

atteint en un point de $\bar{\mathcal{W}}$. De plus, $V < 0$ pour tout point de \mathcal{W} et de $\bar{\mathcal{W}}$. Par conséquent une décroissance minimum de V est atteinte en un point particulier de $\bar{\mathcal{W}}$. , i.e.

$$L_1 = \min_{x \in \bar{\mathcal{W}}} \left(-\frac{d}{dt} V(x) \right) \tag{3.16}$$

En procédant à quelques calculs, on obtient

$$\int_0^t \dot{V}(x(t)) dt = V(x(t)) - V(x(0)) \tag{3.17}$$

$$V(x(t)) = \int_0^t \dot{V}(x(t))dt + V(x(0)) \tag{3.18}$$

Il est maintenant possible de borner l'évolution de V en se plaçant dans le scénario le plus défavorable, c'est-à-dire en supposant qu'en chaque instant la décroissance soit minimum :

$$-\frac{d}{dt}(V) > L_1 \Rightarrow \int_0^t \dot{V}(x(t))dt < -L_1 t \tag{3.19}$$

$$V(x(t)) < V(x(0)) - L_1 t \tag{3.20}$$

Il existe donc un instant fini t_1 tel que $V(x(t_1)) < \check{L}$. Mais ceci contredit le fait que la trajectoire reste dans \mathcal{W} par hypothèse, impliquant ainsi nécessairement que $L = 0$. La stabilité asymptotique découle dès lors du premier cas.

3.6.6 Stabilité exponentielle

Nous connaissons la stabilité asymptotique : $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ Cependant on veut garantir plus :

Définition: $x = 0$ est un point d'équilibre localement exponentiellement stable si $\exists \alpha > 0$ et $\exists \lambda > 0, \exists r > 0$ tel que $\forall t > 0, \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \forall x \in \mathcal{B}_r$

Remarque 1: La surface de Lyapunov (level surface) $V(x) = c$ joue un rôle de barrage si $\dot{V}(x) < 0$

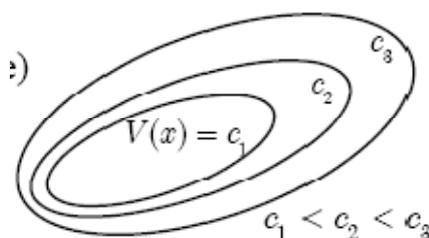


Figure 3.15 : Domain d'attraction

Remarque 2: Pour un équilibre asymptotiquement stable, on appelle bassin d'attraction l'ensemble des conditions initiales dans \mathcal{W} pour lesquelles la solution du système converge vers le point d'équilibre.

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) = c\} \tag{3.21}$$

Alors donne une estimation du bassin d'attraction, malgré que cette estimation soit souvent très conservatrice.

Exemple : Robot

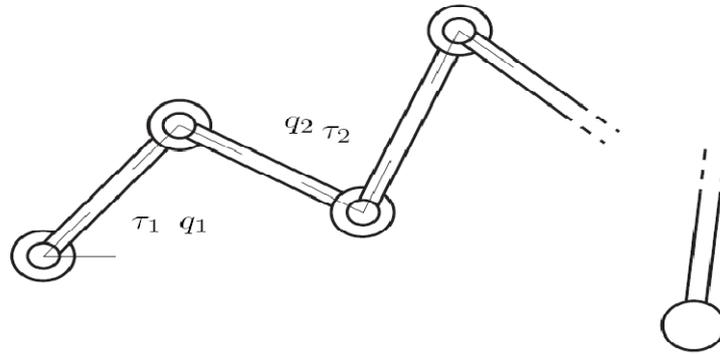


Figure 3.16 : Robot planaire

Loi de commande

$$\tau = -K_d \dot{q} - K_p (q - \bar{q}) \tag{3.22}$$

Lois de la mécanique

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \tag{3.23}$$

Bilan de puissance

$$\frac{d}{dt} E_c = P \tag{3.24}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \right) = \dot{q}^T \tau \tag{3.25}$$

Candidat de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (q - \bar{q})^T K_p (q - \bar{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \tag{3.26}$$

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{p,n} \end{pmatrix}$$

Comme $k_{p,i} > 0, i = 1, \dots, n$, on constate bien que $V(\cdot)$ est définie positive au sens où $V(q, \dot{q}) > 0, \forall q \neq \bar{q}, \forall \dot{q} \neq 0$ et $V(\bar{q}, 0) = 0$.

Fonction de Lyapunov

$$\dot{V} = \dot{q}^T K_p (q - \bar{q}) + \dot{q}^T \tau \tag{3.27}$$

En introduisant la loi de commande $\tau = -K_p (q - \bar{q}) - K_d \dot{q}$ avec $k_{d,i} > 0, i = 1, \dots, n$.

$$K_d = \begin{pmatrix} k_{d,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_{d,n} \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\dot{V} = \dot{q}^T K_p (q - \bar{q}) + \dot{q}^T (-K_d \dot{q} - K_p (q - \bar{q})) = -\dot{q}^T K_d \dot{q} \leq 0 \tag{3.28}$$

Ceci admet une généralisation avec des matrices définies positives arbitraires

$$K_p > 0, K_d > 0.$$

3.6.7 Stabilité globale

Pour l’instant, nous avons exclusivement traité les propriétés locales, dans le sens que la conclusion du théorème de Lyapunov ne conclut que la stabilité en relation avec des conditions initiales comprises dans un voisinage du point. Par conséquent, le simple fait que V soit défini positif et que \dot{V} soit négatif dans tout l’ensemble d’état, ne garantit pas nécessairement que le système soit globalement stable. En d’autres termes, la stabilité locale signifie la stabilité pour $\forall x_0 \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}^n}$ et la stabilité globale celle pour $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. La question est de savoir s’il suffit de remplacer $\mathcal{B}_{\mathcal{R}^n}$ par \mathbb{R}^n , et de vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du système. La réponse est non comme va l’illustrer l’exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \tag{3.29}$$

dont un candidat de Lyapunov est,

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \tag{3.30}$$

Les courbes de niveau de cette fonction de Lyapunov sont représentées à la figure 17. Pour autant que V soit inférieur à l’unité les courbe de niveau sont fermées et encerclent une région compacte. Dès que la valeur dépasse 1,

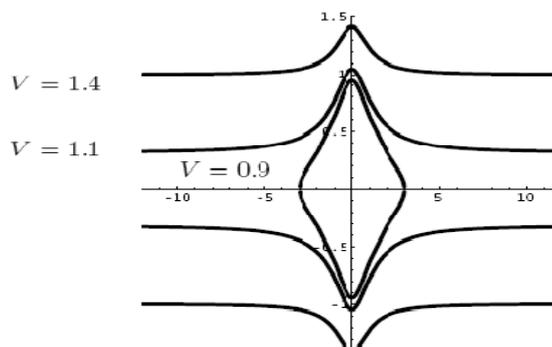


Figure 3.17 : Courbe de niveau de la fonction de Lyapunov $V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$

Les courbes de niveau ne croisent plus l'axe horizontal et ne sont donc plus fermées. Les solutions explicites du système sont,

$$x_1(t) = x_{10}e^{2t}$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-t}$$

Après élimination du temps,

$$x_2 = x_{20}\sqrt{x_{10}x_1}^{-1/2} \tag{3.31}$$

En prenant une condition initiale particulière,

$$x_{10} = 1.5$$

$$x_{20} = \frac{2}{\sqrt{1.5}} = 1.633$$

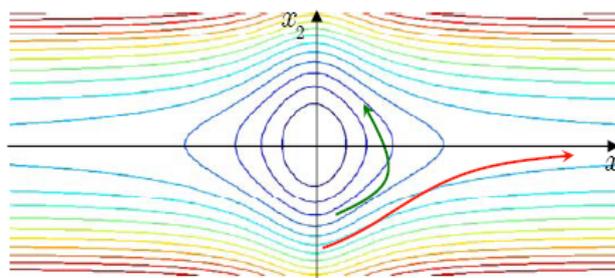


Figure 3.18 : Une solution particulière montre que V décroît à chaque instant le long de cette solution.

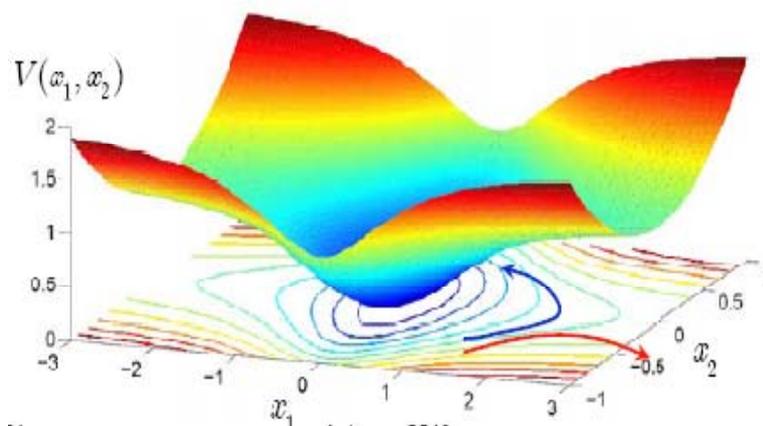


Figure 3.19 : la courbe en 3D

$\Omega_e = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) = c\}$, soit fermée, il faut que

$$c < l = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|x\|=r} \left(\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \right) = 1 \tag{3.32}$$

Théorème

Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclues sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, mais il faut également que la condition de radialement non bornée, c'est-à-dire que

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ lorsque } \|x(t)\| \rightarrow \infty$$

Le théorème suivant récapitule les conditions :

Théorème

S'il existe une fonction V telle que

- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $V(0) = 0$
- $\|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$

Alors, la stabilité (toujours globale) du système est complètement déterminée par les valeurs propres de A .

Définition : On appelle une matrice de Hurwitz (ou stable) A ayant toutes ces valeurs propres à partie réelle strictement négative.

3.6.8 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Soi P une matrice symétrique, définie positive, notée $P > 0$. Alors

$$V(t) = x^T(t)Px(t) \tag{3.33}$$

est définie positive et est un candidat de Lyapunov.

Calcule de la dérive temporelle de V

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) = x^T(t)(A^T P + PA)x(t) \\ &= -x^T(t)Qx(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Alors le système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est asymptotiquement stable si et seulement si $Q > 0$.

Théorème

La matrice A est Hurwitzienne si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice symétrique définie positive, P , vérifiant l'équation de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$.

Remarque :

- On peut prendre $Q = I$.
- Matlab fonction pour résoudre l'équation de Lyapunov est **lyap(A,Q)**

Démonstration du théorème

On suppose Q une matrice symétrique définie positive et étant donnée une matrice P SDP.

$$P = \int_0^{\infty} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt \quad (3.35)$$

Cette intégrale existe si la matrice A stable, donc on trouve.

$$\begin{aligned} -Q &= \int_0^{\infty} dt (e^{A^T t} Q e^{At}) \\ &= \int_0^{\infty} (A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A) dt \\ &= A^T P + P A \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'unicité de la matrice P

$$\begin{aligned} P_1 &= - \int_0^{\infty} d(e^{A^T t} P_1 e^{At}) dt \\ &= - \int_0^{\infty} e^{A^T t} (A^T P_1 + P_1 A) e^{At} dt \\ &= \int_0^{\infty} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt = P \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.7 Stabilité locale et linéarisation

Une approximation locale de la dynamique du système autour du point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système complet. Il s'agit de la méthode *indirecte de Lyapunov*. L'approximation au premier ordre du développement en série de Taylor de la dynamique est calculée, et seul le premier ordre du développement est retenu. Lorsque la dynamique est donnée par un champ de vecteurs $f(x)$, une matrice est obtenue pour caractériser le premier ordre. Son expression est donnée par,

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \quad (3.38)$$

Cette matrice possède des valeurs propres qui permettent de déduire la stabilité du système $\dot{x} = Ax$. La question est de savoir si elles peuvent également induire une conclusion sur la stabilité du système non linéaire $\dot{x} = f(x)$.

Théorème

A partir de la matrice A , on calcule les valeurs propres $\Lambda = \lambda(A)$, si

- $\forall \lambda \in \Lambda \quad \text{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ est asymptotiquement stable
- $\exists \lambda \in \Lambda \quad \text{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ est instable
- $\forall \lambda \in \Lambda \quad \text{Re}(\lambda) \leq 0$ et $\exists \lambda_1 \in \Lambda \quad \text{Re}(\lambda_1) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ on ne peut pas conclure

Attention

La conclusion est relative à la dynamique $\dot{x} = f(x)$, bien que l'on calcule les valeurs propres de A .

Démonstration

$$\dot{x} = f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} x + g(x) = Ax + g(x) \tag{3.39}$$

$$\forall \gamma_i, \exists r \quad \|x\| < r_i \Rightarrow \gamma_i \|x\| > \|g(x)\| \tag{3.40}$$

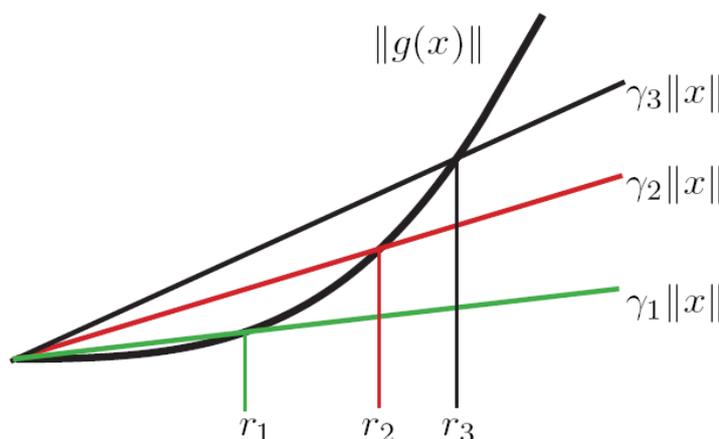


Figure 3.20 : Illustration de la dominance du terme linéaire Ax sur le terme non linéaire $g(x)$.

Comme A est stable $\forall Q > 0 \exists P > 0$

$$A^T P + PA = -Q$$

et donc en posant $V = x^T P x$, avec $\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax + g(x))^T P x + x^T P (Ax + g(x)) \\ &= x^T (A^T P + PA) x + g(x)^T P x + x^T P g(x) \\ &= -x^T Q x + 2x^T P g(x) \leq -x^T Q x + 2|x^T P g(x)| \end{aligned} \tag{3.41}$$

De l'inégalité du produit scalaire : $\|a^T b\| \leq \|a\| \|b\|$ on déduit

$$\dot{V} \leq -x^T Qx + 2\|x\|\|P\|\|g(x)\| \quad (3.42)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, \forall \gamma_i > 0, \exists r_i, \forall x, \|x\| \leq r_i \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma_i \|x\|$

$$\dot{V} \leq -x^T Qx + 2\gamma_i \|P\| \|x\|^2 \quad (3.43)$$

Sachant que $-x^T Qx \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2$, on a donc

$$\dot{V} < -(\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma_i \|P\|)\|x\|^2 \quad (3.44)$$

Il suffit de choisir γ_i suffisamment petit afin que $(\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma_i \|P\|) > 0$. Ainsi pour le r_i associé au γ_i choisie $\dot{V} < 0, \forall x, \|x\| < r$.

Conclusion : $\dot{x} = f(x)$ est localement asymptotiquement stable.

Remarque : La méthode utilisée dans la démonstration de ce théorème est une approche très populaire dans la conception des observateurs non linéaires, l'étude de la stabilité des systèmes de commande par retour de sortie, la commande adaptative et la commande robuste.

- Avantages de la méthode indirecte de Lyapunov :
 - travailler avec la linéarisé tangent ;
 - utiliser un candidat de Lyapunov quadratique.
- Inconvénients de cette méthode
 - ne pas pouvoir déterminer la stabilité si le linéarisé n'est pas hyperbolique (peut déterminer l'instabilité), la méthode est non conclusive lors de la présence de valeur(s) propre(s) à partie réelle nulle ;
 - ne permettre de conclure que sur la stabilité locale, La stabilité que l'on peut conclure n'est valable que dans un voisinage du point d'équilibre. On ne peut pas garantir r très grand ;
 - estimation du bassin d'attraction pourrait être très conservatrice

Ces inconvénients n'apparaissent pas dans la méthode directe de Lyapunov. Le prix à payer est la détermination de la fonction complémentaire $V(x)$ possédant les bonnes propriétés.

3.8 Théorème d'invariance de LaSalle

3.8.1 Motivation

Etablir la stabilité asymptotique lorsque $\dot{V} \leq 0$ au lieu de $\dot{V} < 0$ et étudier les cycles limites en utilisant le fait que le cycle limite est un ensemble invariant. Bien que certains systèmes ont la caractéristique d'avoir une fonction de Lyapunov décroissante, mais pas pour autant strictement décroissante, (c'est-à-dire $\dot{V} \leq 0$ au lieu de $\dot{V} < 0, x \neq 0$), ils sont néanmoins asymptotiquement stable. L'objet de cette section est de présenter les conditions

supplémentaires sur la fonction V et sa dérivée dans le temps pour garantir la stabilité asymptotique. Nous verrons également que le caractère positif défini de V peut très bien être relaxé. Le théorème ne donnera pas une preuve de stabilité au sens de Lyapunov, mais un critère de convergence asymptotique, ceci valant autant pour les points d'équilibre, que pour les cycles limites.

Principe d'invariance de LaSalle est une relaxation du critère de Lyapunov qui permet ;

- d'analyser la stabilité asymptotique au cas où est \dot{V} semi-définie négative
- d'étudier la stabilité des cycles limites.

3.8.2 Ensemble invariant

3.8.2.1 Définition : pour un système dynamique :

$$\dot{x} = f(x); x(0) = x_0 \tag{3.45}$$

Un ensemble invariant \mathcal{M} est un ensemble des points de l'espace d'état tel que toute trajectoire du système, ayant pour condition initiale un point dans cet ensemble, reste indéfiniment à l'intérieur du même ensemble

$$\mathcal{M} = \{x / x_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{M} \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{3.46}$$

Cet ensemble est dit positivement invariant si

$$\mathcal{M} = \{x / x_0 \in \mathcal{M} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{M} \forall t \geq 0\} \tag{3.47}$$

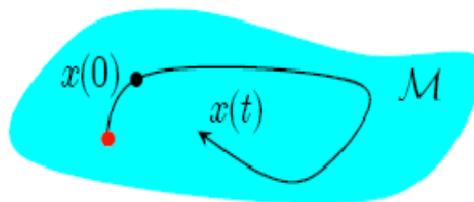


Figure 3.21 : Ensemble invariant \mathcal{M}

Exemples de l'ensemble invariant

- Point d'équilibre.
- Bassin d'attraction d'un point d'équilibre.
- Cycle limite.
- Un ensemble défini par (Lyapunov surface)

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) \leq c\} \text{ avec } \dot{V}(x) \leq 0; \forall x \in \Omega_c$$

3.8.2.2 Ensemble défini par ($\dot{V} = 0$)

Ensemble ν : $\nu = \{x / \dot{V}(x) = 0\}$

Le théorème de Lasalle peut maintenant être énoncé. C'est un résultat de nature locale au sens où il nécessite la connaissance d'un ensemble compact pour toutes les conditions initiales.

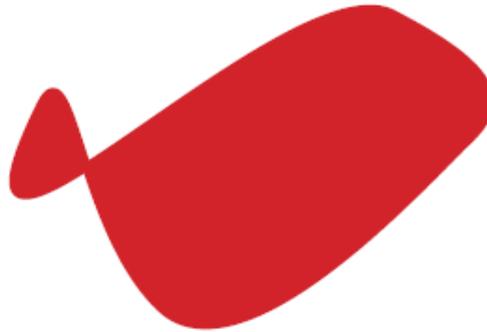


Figure 3.22: Ensemble ν . C'est l'ensemble de points pour lesquels $\dot{V}(x) = 0$.

3.8.2.3 Théorème d'invariance de LaSalle

Théorème : Soit un système dynamique $\dot{x} = f(x)$; $x \in \mathbb{R}^n$ et \mathcal{D} un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Soit $V(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable. S'il est possible de déterminer des ensembles Ω, E et M Avec les propriétés suivantes :

- 1) $\Omega \subset \mathcal{D}$ est compact (fermé et borné) et invariant

$$x_0 \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega \forall t \geq 0 \quad (3.48)$$

- 2) $\dot{V}(x) \leq 0$ dans tout l'ensemble de Ω
- 3) E est un sous-ensemble de Ω : $E = \{x/x \in \Omega; \dot{V}(x) = 0\}$
- 4) M est l'ensemble invariant le plus grand (maximal) dans E :

$$M \subseteq E; x(t_0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \geq t_0 \quad (3.49)$$

Alors, pour tout $x(0) \in \Omega$, la solution du système converge asymptotiquement vers M .

Remarques

- La fonction $V(x)$ n'est pas nécessairement définie positive
- Ce théorème conclut sur la convergence de la solution du système vers un sous ensemble mais pas sur la stabilité.
- Ce théorème permet de conclure sur la stabilité asymptotique du point d'équilibre lorsque $\dot{V}(x) \leq 0$ si $M = \{0\}$ et si $V(x)$ est au moins localement définie positive autour du point d'équilibre.
- Ce théorème permet d'analyser la convergence asymptotique vers un cycle limite.

Illustrations

Ce théorème possède l'avantage de s'appliquer à l'analyse de la convergence asymptotique vers un cycle comme l'illustre la figure ci-dessous.

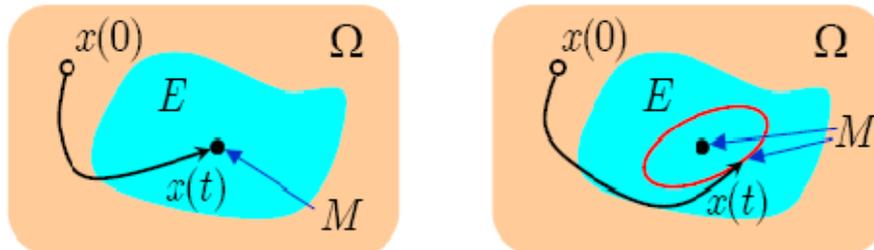


Figure 3. 23: Le théorème d'invariance s'applique aussi bien aux points d'équilibre qu'aux cycles limites. M .

3.8.2.4 Exemple du pendule (modèle d'état)

On considère un simple pendule qui consiste en une masse m reliée par une tige de longueur unitaire à son axe de rotation. Il est soumis à un frottement visqueux proportionnel à la vitesse du pendule autour de son axe.

Energie cinétique

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 \tag{3.50}$$

Energie potentielle :

$$E_{pot} = mg(1 - \cos(\theta)) \tag{3.51}$$

Le Lagrangien est donné par

$$L = E_{cin} - E_{pot} \tag{3.52}$$

De plus, une force généralisée $F_\theta = -b\dot{\theta}$ s'applique également, où $b \in \mathbb{R}$ est un paramètre positif ($b > 0$) correspondant au coefficient de frottement.

La formule de mécanique analytique

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta \tag{3.53}$$

Conduit à

$$m\ddot{\theta} + mg\sin(\theta) = -b\dot{\theta} \tag{3.54}$$

Avec $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1 \tag{3.55}$$

$$\dot{x}_2 = -g\sin(x_1) - \frac{b}{m}x_2 = f_2 \tag{3.56}$$

Candidat de Lyapunov

Considérons, par exemple, la fonction d'énergie complète du pendule

$$V = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m x_2^2 + mg(1 - \cos(x_1)) \tag{3.57}$$

Cette fonction est positive pour autant que $\dot{\theta}$ et le second terme ne s'annulent pas simultanément. Par conséquent, V est nul pour

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2\pi k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$V = \frac{\partial V}{\partial x} f = m x_2 \left(-g \sin(x_1) - \frac{b}{m} x_2 \right) + m g x_2 \sin(x_1) = -b x_2^2 \leq 0 \tag{3.58}$$

Exemple du pendule (ensembles E et M)

$$E = \{x | \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1, x_2 | x_2 = 0\}$$

est la droite horizontale passant par l'origine.

L'ensemble E , le plus grand invariant inclu dans M

$f(x)$ Définissant la dynamique soit tangent ou nul à l'axe horizontal des abscisses.

$$f_2 = 0 \Rightarrow g \sin(x_1) = 0$$

C'est une multitude de points isolés

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi k \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple du pendule (illustrations)

$m = 1, g = 10$ et ($b = 1$ et $b = 0$)

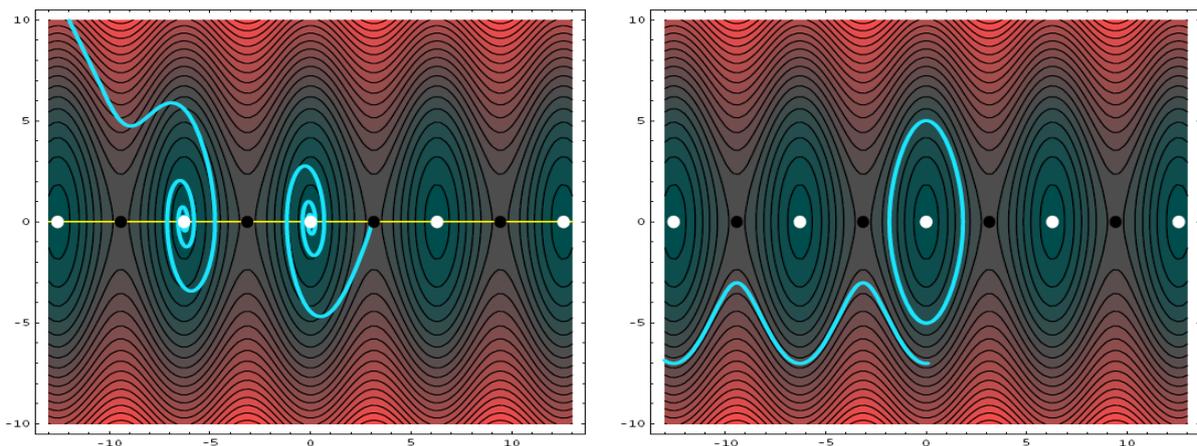


Figure 3.24: (θ selon l'axe horizontal et $\dot{\theta}$ selon la verticale) A gauche, le frottement est non nul. L'ensemble V est représenté en jaune et I correspond aux points blancs (minimum de V), et aux points noirs (extremum de V , points selle). A droite, le frottement est nul. Des solutions pour des choix de conditions initiales différentes sont également représentées.

3.9 Constructions des fonctions de Lyapunov

3.9.1 Théorèmes d'instabilité

La présente section présente trois méthodes de construction de fonctions de Lyapunov

3.9.1.1 Méthode de Krasovskii

Théorème 1

Soit $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$ et posons $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$$F(x) = A^T(x) + A(x) < 0, \forall x \neq 0$$

↓

$$V(x) = f(x)^T \cdot f(x)$$

Est une fonction de Lyapunov avec $\dot{V} < 0$

Démonstration :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T f(x) + f(x)^T \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = f(x)^T (A(x)^T + A(x)) f(x) \quad (3.59)$$

$$\dot{V} = f(x)^T F(x) f(x) < 0 \quad (3.60)$$

Méthode de Krasovskii (variante)

Théorème 2

Soit $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$ et posons $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$, s'il existe une matrice symétrique et $P > 0$

$$F(x) = A^T(x)P + PA(x) < 0, \forall x \neq 0$$

↓

$$V(x) = f(x)^T P f(x)$$

Est une fonction de Lyapunov avec $\dot{V} < 0$

Démonstration :

$$\dot{V} = \dot{x}^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T P f(x) + f(x)^T P \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = f(x)^T (A(x)^T P + P A(x)) f(x) \quad (3.61)$$

$$\dot{V} = f(x)^T F(x) f(x) < 0 \quad (3.62)$$

3.9.1.2 Méthode du gradient variable

La fonction de Lyapunov est l'intégrale de son gradient :

$$V(x) = \int_0^x \nabla V(\xi) d\xi \quad (3.63)$$

paramétrisation du gradient (et non de la fonction V elle-même) :

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.64)$$

Imposer $\dot{V} < 0$:

$$\Rightarrow \text{le choix de } a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Lorsque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j \quad (3.65)$$

L'intégration ne dépend pas du chemin :

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi, 0, \dots, 0)d\xi + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi, \dots, 0)d\xi + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, \xi)d\xi \quad (3.66)$$

A ne pas oublier vérifier que $V(x) > 0 \forall x \neq 0$.

Exemple

Système

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 - x_2x_1^2 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 - x_1x_2^2 = f_2(x_1, x_2)$$

Avec $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ comme point d'équilibre

Paramètres pour le gradient :

$$\nabla V = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V_1 f_1 + \nabla V_2 f_2 = & -2a_{11}x_1^4 - a_{11}x_1^3x_2 - 2a_{12}x_1^3x_2 - 2a_{12}x_1^2x_2^2 \\ & - a_{12}x_1x_2^3 - a_{22}x_1x_2^3 - a_{22}x_2^4 \end{aligned}$$

Dérivée du candidat de Lyapunov :

Avec $a_{11} = 2, a_{12} = a_{22} = 1$:

$$\dot{V} = -4x_1^4 - 4x_1^3x_2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 - x_1x_2^3 - x_2^4$$

$$\dot{V} = -x_1^2(2x_1 + x_2)^2 - x_2^2(x_1 + x_2)^2 < 0$$

Intégration :

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} \nabla V_1(\xi, 0)d\xi + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, \xi)d\xi \\ &= \int_0^{x_1} 2\xi d\xi + \int_0^{x_2} (x_1 + \xi)d\xi = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

3.10 Instabilité et méthode de Lyapunov

Déterminer l'instabilité peut être aussi important que d'établir la stabilité. Cependant, la tâche est parfois plus simple étant donné qu'il suffit d'exhiber une condition initiale qui conduit à

une trajectoire qui sort de la boule d'exigence de rayon R , plutôt que de garantir que toutes les trajectoires demeurent dans la boule R pour une sous-boule (de rayon r) de conditions initiales, comme cela était le cas pour la stabilité. Nous présenterons résultats permettant d'identifier si un système est instable. Le premier consiste à vérifier que V croit, quelles que soient les conditions initiales.

3.10.1 Définition de l'instabilité

$$\exists R > 0, \forall 0 < r < R, \exists x_0, \|x_0\| < r \exists \bar{t} > 0 \quad \chi(x_0, \bar{t}) > R \quad (3.67)$$

3.10.2 Théorèmes d'instabilité

Théorème d'instabilité 1

- $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in \Omega, V(0) \geq 0$ et $V(x) > 0 \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$
 - $\dot{V} > 0, \forall x \in \Omega, x \neq 0$
- $\Rightarrow 0$ est instable

La première condition ($V(x) > 0$) est de garantir la positivité de la fonction de test, et la seconde consiste à vérifier que cette fonction croit le long des solutions ($\dot{V}(x) > 0$).

Le second résultat particularise quelque peu les conditions et permet de détecter une plus large classe de systèmes instables que le premier résultat.

Théorème d'instabilité 2

- $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in \Omega, V(0) \geq 0$ et $V(x) > 0 \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$
 - $\exists \lambda > 0, \dot{V} - \lambda V(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$
- $\Rightarrow 0$ est instable

La seconde condition introduit un test indirect qui consiste à exprimer la dérivée en utilisant la fonction Velle-même. Comme cette fonction est scalaire, on aboutit à une équation différentielle avec un seul état V . Si le facteur de proportionnalité λ est plus grand que zéro, cela conduit à une croissance de V et donc à une instabilité.

Théorème d'instabilité de Chetaev

$$\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ et } \exists \Omega_l \subset \Omega$$

- $V(x) > 0, \forall x \in \Omega_l$
 - $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \Omega_l$
 - $0 \in \partial \Omega_l$
 - $V(x) = 0, \forall x \in \partial \Omega_l$
- $\Rightarrow 0$ est instable

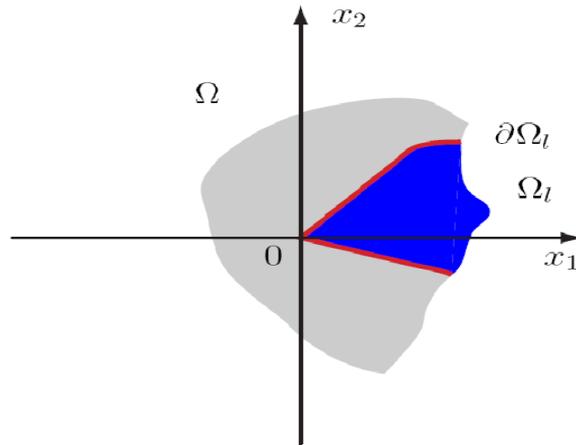


Figure 3.25: Figure illustrant le théorème de Chetaev

3.11 Théorème inverse de Lyapunov

- Est-ce que l'existence d'une fonction de Lyapunov est une condition nécessaire de la stabilité, pour la stabilité du système cette propriété pourrait être intéressante avant la recherche la fonction de Lyapunov (e.g. fonction de Lyapunov assignée - CLF).
- En général, pour les systèmes non stationnaires, l'existence d'une fonction de Lyapunov est une condition nécessaire pour la stabilité du système.
- Pour les systèmes stationnaires, il nécessite une condition plus forte, c.-à-d., le système doit être asymptotiquement stable.

3.11.1 Théorème inverse de Lyapunov

Théorème [stabilité asymptotique] Soit l'origine un point d'équilibre asymptotiquement stable du système $\dot{x} = f(x)$, f localement Lipchitzienne dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine. Soit $D_A \subset D$ le bassin d'attraction de $x = 0$. Alors, il existe une fonction définie positive $V(x) \in C^\infty D_A \rightarrow \mathbb{R}$ radialement non bornée sur ∂D_A , et une fonction définie positive $W(x) \in C^1 D_A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$L_f V(x) \leq -W(x) \quad \forall x \in D_A \quad (3.68)$$

et pour tout $c > 0$, $\{V(x) \leq c\}$ est un sous ensemble compact de D_A . Si $D_A = \mathbb{R}^n$, $V(x)$ est radialement non bornée.

- Exemple de la fonction pour l'étude de L-instabilité dans le cadre du Critère III

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

$$V > 0, \forall |x_1| > |x_2|$$

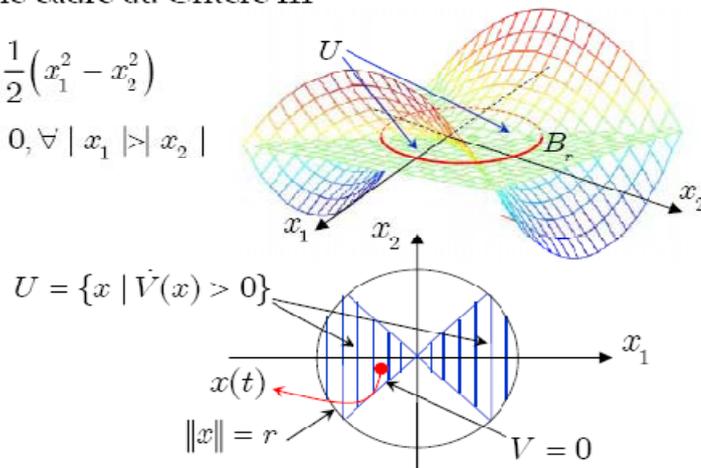


Figure 3.26: Instabilité des systèmes non linéaires

CHAPITRE 4 : METHODE DU PREMIER HARMONIQUE

4.1 Introduction

L'idée consiste à généraliser la méthode de l'analyse harmonique utilisée pour l'étude de systèmes linéaires. Il s'agit de la combinaison en rétroaction d'un système linéaire ayant une seule entrée et une seule sortie, bouclé par un élément non linéaire. Ce dernier élément ne possède pas de dynamique et correspond à une fonction statique arbitraire.

En effet, on ne peut pas proprement parler à éliminer un jeu dans un engrenage, si ce n'est recourir à le changer ou à le réparer. Tout au plus, nous pouvons espérer compenser son effet néfaste par la manière dont le système comportant cet élément est commandé.

L'objectif de cette analyse est de détecter et caractériser la présence d'éventuels cycles limites. Il s'agit de déterminer à la fois la propriété de se maintenir après une légère perturbation (stabilité) et de trouver les paramètres représentatifs tels que *l'amplitude et la fréquence du cycle limite*.

4.1.1 Hypothèses d'application

H1- On considère uniquement les systèmes asservis possédant un élément non linéaire dans la chaîne d'asservissement.

H2- L'élément non linéaire sera invariant dans le temps.

H3- Les parties linéaires dans la chaîne d'asservissement sont stables et se comportent comme des filtres passe-bas, (hypothèse de filtrage).

4.1.2 Condition de validité

Il faut vérifier deux conditions pour pouvoir appliquer la méthode du premier harmonique à un système asservi non linéaire :

- **Condition de séparabilité** : le système linéaire possède un seul bloc non linéaire qu'il est possible d'isoler. Les autres éléments sont supposés linéaires, au moins approximativement.
- **Condition de filtrage** : la partie linéaire du système non linéaire, notée globalement $G(p)$, est un filtre passe-bas qui filtre les termes en 2ω 3ω , etc. ce qui rend acceptable l'approximation au premier harmonique. Dans le calcul du développement en séries de Fourier. Cette dernière condition est qualitative, mais sa pertinence dépend de la qualité de l'approximation.

4.2 Système linéaire et non-linéarité statique

Considérons la mise en série, en boucle ouverte, d'un premier bloc, dont le comportement est non-linéaire, et d'une simple fonction de transfert qui constitue le second bloc (Figure.1).

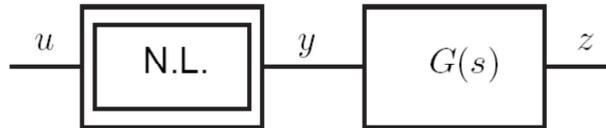


Figure.4.1. Association d'un bloc non-linéaire statique N.L. et d'une fonction de transfert $G(s)$.

Nous étudierons les conséquences de la boucle fermée ($u = -z$) ultérieurement. De plus, nous ne considérerons qu'une relation non-linéaire statique du premier bloc. Ainsi, à chaque instant t , la sortie $y(t)$ est une simple fonction de son entrée $u(t)$, c.-à-d.

$$y(t) = \varphi(u(t)) \quad (4.1)$$

4.2.1 Excitation sinusoïdale en boucle ouverte

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.2)$$

La saturation est décrite par la fonction

$$y(t) = \varphi(u(t)) = \begin{cases} ka & u(t) > a \\ ku(t) & -a \leq u(t) \leq a \\ -ka & u(t) < -a \end{cases} \quad (4.3)$$

Où k définit le gain de la partie non-saturée et le paramètre a correspond à la valeur d'entrée à partir de laquelle la saturation est active. La figure.2 illustre le phénomène pour un choix particulier des paramètres.

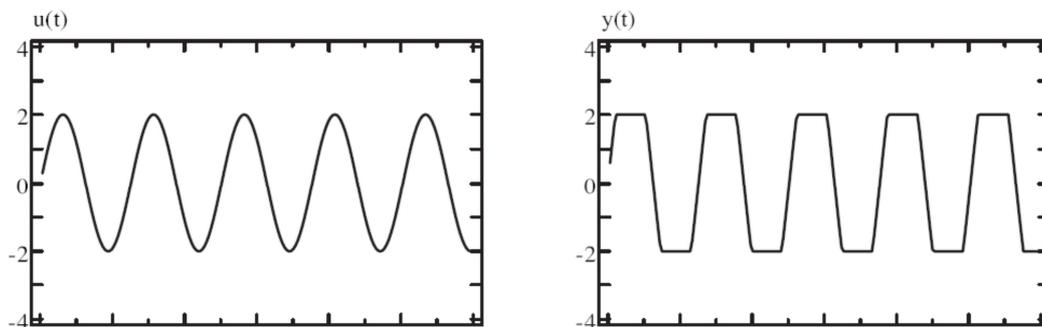


Figure 4.2. Représentation graphique de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ de la saturation pour les valeurs $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$ et $a = 1$.

4.2.2 Caractéristique passe-bas du système linéaire $G(s)$

$$G(s) = \frac{b^2}{s^2 + 2bs + b^2} \quad (4.5)$$

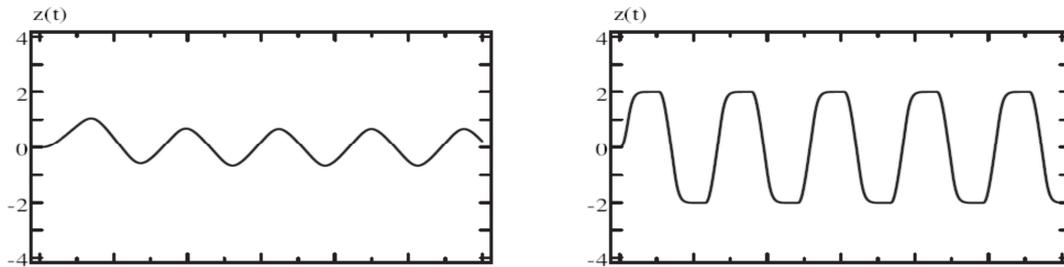


Figure.4.3. Représentation graphique de la sortie du système linéaire lorsque $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$ et $a = 1$ pour deux valeurs du paramètre b de la fonction de transfert. À gauche $b = 3$ et à droite $b = 30$.

Lorsque le système filtre peu ($b = 30$), le signal $z(t)$ est très proche de la sortie de la non-linéarité $y(t)$. Par contre, en examinant le premier résultat ($b = 3$), l'effet conjoint de la saturation φ et du système linéaire $G(s)$ revient simplement à déphaser et à atténuer la sinusoïde d'origine, un peu comme le ferait un système linéaire. La non-linéarité a en quelque sorte disparue, ou de manière plus rigoureuse, elle a été englobée pour constituer avec $G(s)$ une sorte de nouvelle fonction de transfert.

4.2.3 Gain complexe équivalent

Le comportement global de la mise en série des deux éléments montre qu'il est peu commode de le séparer en une partie purement non-linéaire caractérisable et une partie linéaire. En effet, il n'est pas aisé en examinant le signal $z(t)$ ($b = 3$) de détecter la présence d'une saturation. Cependant, il est possible de substituer à la non-linéarité, un nombre complexe N , permettant de caractériser celle-ci sans perdre trop de qualité dans la réponse $z(t)$.

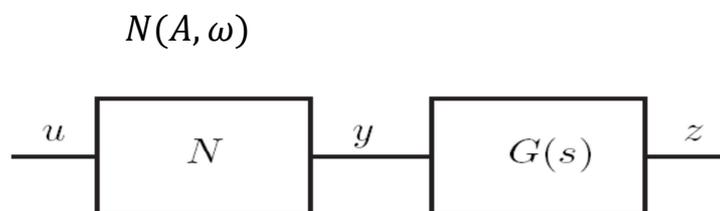


Figure.4.4. La non-linéarité statique $N.L.$ est remplacée par un gain équivalent complexe N .

Pour déterminer le gain N , nous procédons par essais/erreurs et il est relativement aisé de trouver la sinusoïde.

$$0.329A \sin(\omega t - 2.00) \quad (4.6)$$

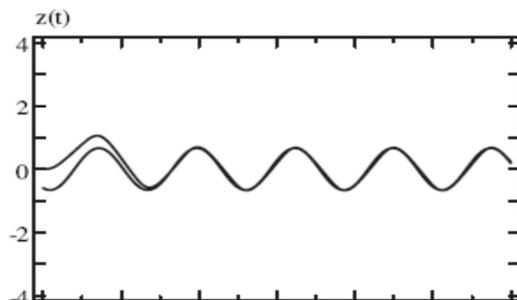


Figure.4.5. Représentation graphique de la sortie du système linéaire lorsque $A = 2$, $\omega = 5$, $k = 2$, $a = 1$ et $b = 3$. Une sinusoïde $0.329A \sin(\omega t - 2.00)$ y est superposée.

4.3 Premier harmonique

Il est fastidieux de déterminer le nombre complexe N en fonction des deux paramètres A et ω par une succession de simulations du type que nous avons exposé à la section précédente. Il est plus efficace de trouver une expression analytique du gain équivalent $N(A, \omega)$.

4.3.1 Décomposition en harmonique

Joseph Fourier a démontré que tout signal périodique de période T possédait une décomposition en une somme finie ou infinie de sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples de la fréquence $\omega = 2\pi f$ (fondamentale) du signal. Comme la non-linéarité est dépourvue de dynamique, lorsque le signal

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.7)$$

Ceci implique que le signal de sortie $y(t)$ puisse être décomposé en série de Fourier :

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} [a_l \cos(l\omega t) + b_l \sin(l\omega t)] \quad (4.8)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) d(\omega t) \quad (4.9)$$

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(l\omega t) d(\omega t) \quad (4.10)$$

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(l\omega t) d(\omega t) \quad (4.11)$$

Formellement, on devrait écrire $a_0(A, \omega)$, $a_1(A, \omega)$ et $b_1(A, \omega)$, les intégrales précédentes conduisant alors à une formule respective. Nous n'insisterons pas sur cette précision de notation, sauf lorsque cela est vraiment indispensable.

4.3.2 Equivalent de premier harmonique

Puisque a_0 , a_1 et b_1 sont suffisants pour définir un nombre complexe, nous retenons de la série (4.8) que le terme constant et ceux associés à la fondamentale. Ceci constitue l'approximation du premier harmonique cherchée et permet de déterminer le gain équivalent N .

En effet, en approximant

$$y(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = \frac{a_0}{2} + M \sin(\omega t + \theta) \quad (4.12)$$

Avec

$$M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{ et } \theta(A, \omega) = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

Ainsi, lorsque la non-linéarité est parfaitement symétrique, $a_0 = 0$, et le gain équivalent s'exprime comme

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j\omega t + \theta}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\theta} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) \quad (4.13)$$

4.3.3 Calcul de l'équivalent de premier harmonique

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) d(\omega t) \quad (4.14)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (4.15)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.16)$$

Exemple de la saturation

$$A \leq a \quad y(t) = k A \sin(\omega t) \quad (4.17)$$

$$A > a \quad y(t) = \begin{cases} k A \sin(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ k a & \gamma < \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) \quad (4.18)$$

Où γ est une variable temporaire définissant l'angle à partir duquel la saturation commence à faire son effet. Etant donné que la saturation est symétrique, c.-à-d. $\varphi(u) = \varphi(-u)$ on déduit que $a_0 = 0$ (absence de comportement continue) et $a_1 = 0$. Par contre $b_1 \neq 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma kA \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_\gamma^{\frac{\pi}{2}} k a \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{kA}{2\pi} \left[\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \quad (4.19)$$

On déduit le gain équivalent

$$N(A) = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] & A > a \end{cases} \quad (4.20)$$

En reportant les valeurs numériques $A = 2$, $k = 2$ et $a = 1$, nous obtenons $N(A) = 1.218$, justifiant ainsi, par des moyens analytiques, les résultats empiriques de la section 4.2.

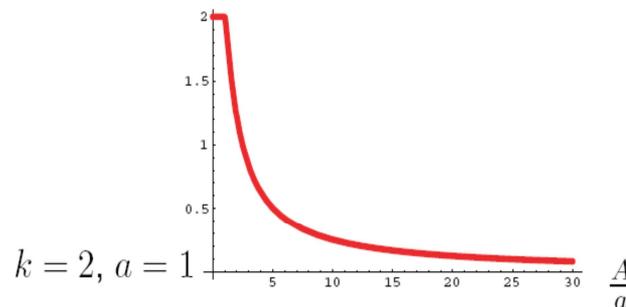


Figure.4.6. Gain équivalent purement réel de la saturation. Il diminue en fonction de l'amplitude.

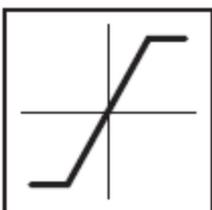
4.4 Non-linéarités communes

Dans cette section, nous présentons les résultats du calcul analytique de quatre non-linéarités communes. En effet, par sommation entre une saturation et un gain dont les signes et les valeurs sont convenablement choisis, toutes les non-linéarités de cette section sont exprimables.

4.4.1 Saturation

La saturation correspond à une modélisation de la limitation de beaucoup d'actionneur. Tant que l'actionneur opère dans sa plage de fonctionnement, sa sortie $y(t)$ est proportionnelle à la valeur désirée de sa sortie $u(t)$, c.-à-d. $y(t) = ku(t)$. Par contre, si la valeur désirée est irréalisable ($u(t) > a$ par exemple), l'actionneur ne peut que fournir le maximum possible ($y(t) = ka$) et il n'y a plus de proportionnalité entre la grandeur désirée et la sortie effective.

a) Symbole et fonction



$$y(t) = \hat{\varphi}(u(t)) = \begin{cases} ka & u(t) > a \\ ku(t) & -a \leq u(t) \leq a \\ -ka & u(t) < -a \end{cases}$$

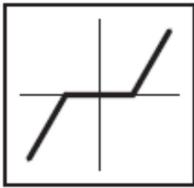
b) Gain équivalent

$$N(A) = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] & A > a \end{cases} \quad (4.21)$$

4.4.2 Zone morte

La zone morte correspond à la perte de transmission entre la grandeur d'entrée $u(t)$ et celle de la sortie $y(t)$ pour des valeurs proches de zéro. Ainsi, tant que la grandeur désirée n'a pas atteint un seuil δ , la grandeur de sortie $y(t)$ est nulle. Dès que la grandeur d'entrée dépasse ce seuil, la sortie correspond à la différence entre l'entrée et le seuil multiplié par un gain k .

a) Symbole et fonction



$$y(t) = \check{\varphi}(u(t)) = \begin{cases} k(u(t) - \delta) & u(t) > \delta \\ 0 & -\delta \leq u(t) \leq \delta \\ -k(u(t) + \delta) & u(t) < -\delta \end{cases}$$

b) Gain équivalent

$$N(A) = \begin{cases} 0 & A \leq \delta \\ \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right] & A > \delta \end{cases} \quad (4.22)$$

c) Graphique

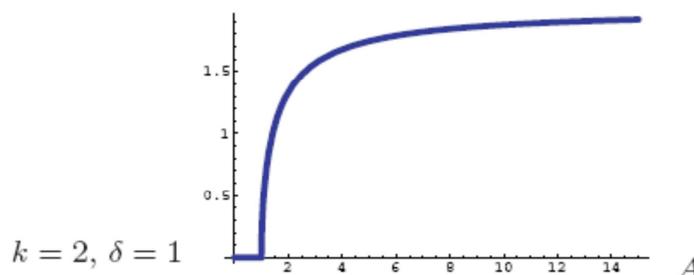


Figure.4.7. Gain équivalent purement réel de la zone morte. Il augmente en fonction de l'amplitude.

Remarques : Pour obtenir le gain équivalent de la zone morte, il suffit de remarquer que celle-ci peut se fabriquer très facilement à partir d'une saturation. En effet, en posant $a = \delta$ et

en désignant la fonction de la saturation par $\hat{\varphi}$ et celle de la zone morte par $\check{\varphi}$, un montage sommateur entre un gain k et l'opposé d'une saturation donne la zone morte, autrement dit $\check{\varphi} = k - \hat{\varphi}$. Réciproquement, il est facile de construire une saturation à partir d'une zone morte, car une fois posé $\delta = a$, la saturation s'exprime comme $\hat{\varphi} = k - \check{\varphi}$.

4.4.3 Relais

Le relais correspond à la commutation tout ou rien en fonction du signe de la valeur d'entrée. Lorsque celle-ci est positive, la sortie du relais prend la valeur fixe $+M$. Elle prend la valeur contraire pour des valeurs négatives de l'entrée.

a) Symbole et fonction



$$y(t) = \bar{\varphi}(u(t)) = \begin{cases} +M & u(t) > 0 \\ 0 & u(t) = 0 \\ -M & u(t) < 0 \end{cases}$$

b) Gain équivalent N(A)

Pour calculer le gain équivalent, il suffit de remarquer que la fonction $\bar{\varphi}$ peut être exprimée à partir de celle de la saturation $\hat{\varphi}$, en posant $k = \frac{a}{M}$, et en passant à la limite $\lim_{a \rightarrow 0}$. Ainsi

$$\bar{\varphi}(u(t)) = \lim_{a \rightarrow 0} \hat{\varphi}\left(a, k = \frac{a}{M}, u(t)\right), \quad (4.23)$$

et donc en utilisant le fait que $\sin(x) = x + o(x)$ (c.-à-d. $\arcsin(x) = \frac{1}{x} + o(x)$)

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (4.24)$$

4.4.4 Hystérèse

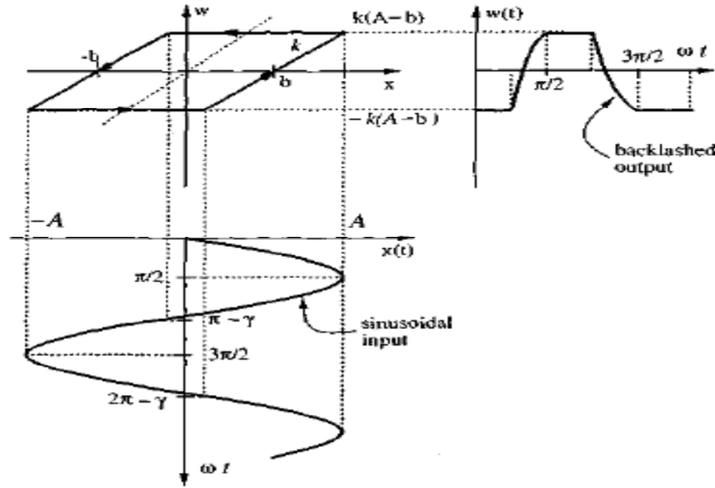


Figure.4.8. la sortie de l'hystérèse.

L'hystérèse peut modéliser une transmission comportant deux engrenages. Lorsqu'un premier engrenage commence à tourner, durant un angle de δ , il n'y a pas d'effet sur la rotation du second engrenage. Une fois cet angle parcouru, le second engrenage commence à tourner et il tourne alors d'un angle correspondant à celui du premier. Lorsque le mouvement est inversé, il est nécessaire au premier engrenage de parcourir une différence d'angle de 2δ dans le sens inverse sans qu'il y ait d'effet sur le second engrenage. Ce dernier commence alors à tourner dans le sens contraire.

$$a_1 = \frac{4kb}{\pi} \left(\frac{b}{A} - 1 \right) \tag{4.25}$$

$$b_1 = \frac{Ak}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{2b}{A} - 1 \right) - \left(\frac{2b}{A} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{A} - 1 \right)^2} \right) \tag{4.26}$$

$$\|N(A)\| = \frac{1}{A} \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4.27}$$

$$\arg(N(A)) = \arctan \left(\frac{a_1}{b_1} \right) \tag{4.28}$$

4.4.5 Non-linéarités symétriques, continues par morceaux

Nous avons vu que la saturation permet de synthétiser une zone morte et un relais. En outre, comme nous allons le voir dans cette section, elle peut également fabriquer un ensemble très grand de non-linéarités statiques. Nous allons montrer comment, à partir de zones mortes (et donc à l'aide de saturations), il est possible de constituer n'importe quelle non-linéarité statique symétrique constante par morceaux, par simple principe de superposition (c.-à-d. en utilisant des sommes et des multiplications par des gains constants). La figure 4.9 illustre le principe.

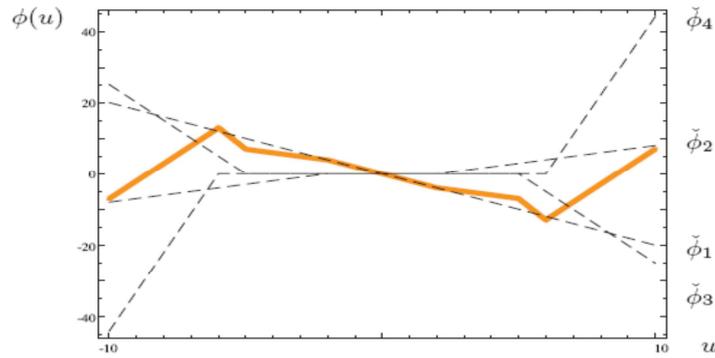


Figure.4.9. Le trait en solide représente une non-linéarité statique symétrique, et continue par morceaux. Elle est égale à la somme des quatre zones mortes avec $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4$. Les zones mortes sont représentées en traits hachurés. La non-linéarité peut donc s'exprimer comme une combinaison de saturations avec des paramètres a_i et k_i judicieusement choisis.

Comme la non-linéarité est symétrique, il suffit de considérer le cas $u \geq 0$. φ est alors déterminé par des valeurs en un nombre fini m de points. Soit $u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_m$, les valeurs de u pour lesquelles φ vaut $\varphi_1 = \varphi(u_1)$, $\varphi_2 = \varphi(u_2)$, \dots , $\varphi_m = \varphi(u_m)$, avec $\varphi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Ceci étant donné, nous pouvons exprimer φ à l'aide de $\check{\varphi}_i(k_i, \delta_i)$. Pour trouver ces expressions, il suffit de fixer $\delta_i = u_i$, $i = 1, \dots, m$ et de constater que les zones mortes $i, i = 1, \dots, m$ n'influencent pas le comportement pour $u \in [0, u_i[$.

4.5 Système en rétroaction

Ceci est représenté à la figure 4.10. La boucle est fermée en forçant l'entrée u est égale à l'opposé de la sortie z

$$u(t) = -z(t) \tag{4.24}$$

Pour qu'un cycle limite puisse se maintenir dans un tel arrangement, il faut que les signaux respectent les équations

$$y(t) = \varphi(u(t)) \tag{4.29}$$

$$z(t) = \int_0^t y(\tau)g(t - \tau)d\tau \tag{4.30}$$

$$u(t) = -z(t) \tag{4.31}$$

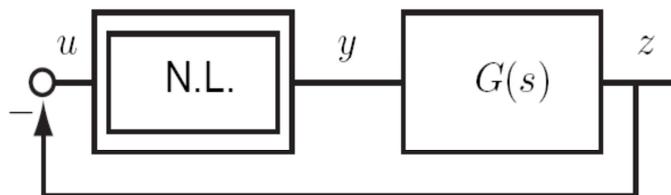


Figure.4.10 : La boucle de rétroaction est fermée par le signal de sortie de telle sorte que $u(t) = -z(t)$.

où $g(\cdot)$ représente la réponse impulsionnelle de $G(s)$. Equivalent à déterminer le point fixe $z(\cdot)$ de l'équation intégrale

$$z(t) = \int_0^t \varphi(-z(\tau))g(t - \tau)d\tau \quad (4.32)$$

4.5.1 Paramètres A et ω du cycle limite

Par conséquent, un cycle limite existe lorsque les signaux respectent les conditions fréquentielles. Gain équivalent et système linéaire en boucle fermée est

$$Y(j\omega) = N(A, \omega)U(j\omega) \quad (4.33)$$

$$Z(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega) \quad (4.34)$$

$$U(j\omega) = -Z(j\omega) \quad (4.35)$$

Ces trois conditions conduisent à une équation unique pour $Z(j\omega)$

$$Z(j\omega) = -G(j\omega)N(A, \omega)Z(j\omega) \quad (4.36)$$

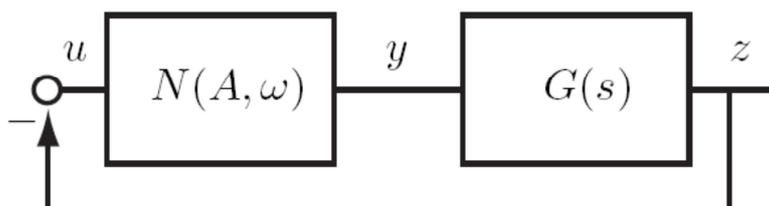


Figure.4.11 : La boucle de rétroaction est fermée par le signal de sortie de telle sorte que $u(t) = -z(t)$.

Ainsi, selon le critère du premier harmonique, une estimation possible de l'amplitude A et de la pulsation ω du cycle limite éventuel correspond aux solutions de l'équation

$$1 = -G(j\omega)N(A, \omega) \quad (4.37)$$

Il peut exister une solution, plusieurs solutions, ou aucune solution à cette équation. Une solution est représentée par un couple A, ω .

4.6 Croisement et Stabilité

Pour représenter les solutions de l'équation précédente, nous utilisons le diagramme de Nyquist.

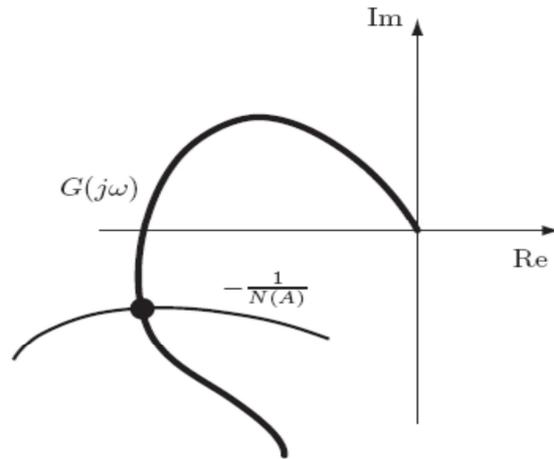


Figure.4.12. Représentation de la réponse harmonique et du gain équivalent dans le plan complexe (diagramme de Nyquist). Le point de croisement y est également représenté. Le cycle limite aura les paramètres A et ω donné par ce point de croisement.

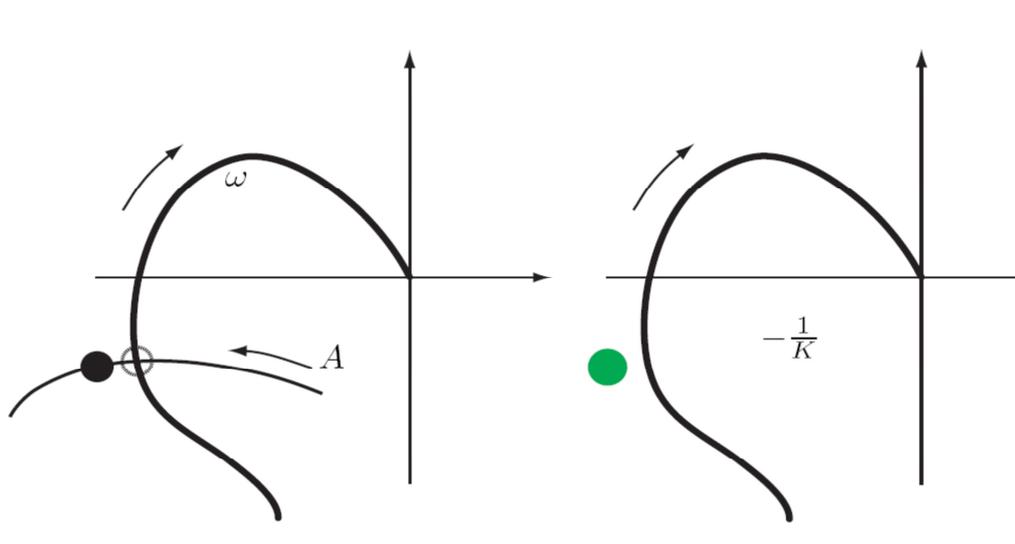


Figure.5.13. Illustration d'une prévision de la présence d'un cycle limite stable.

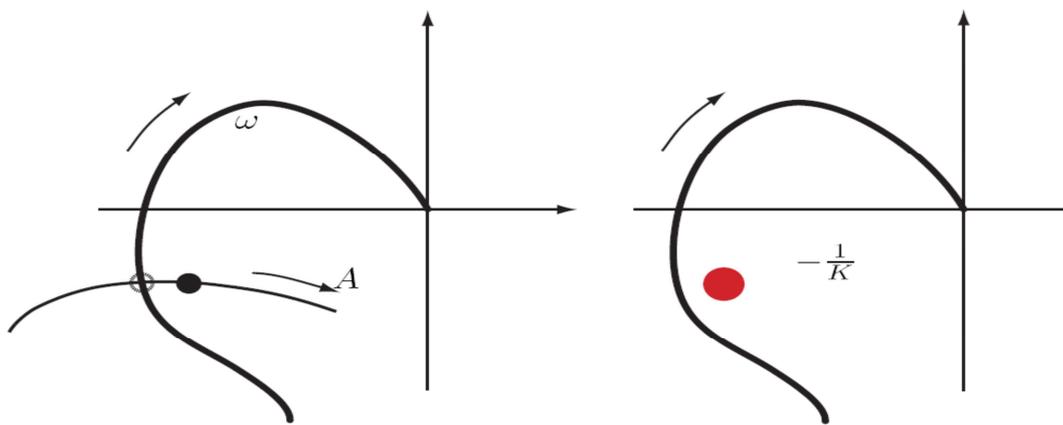


Figure.4.14. Illustration d'une prévision de la présence d'un cycle limite instable.

a) **Théorème des résidus** : $N = Z - P$

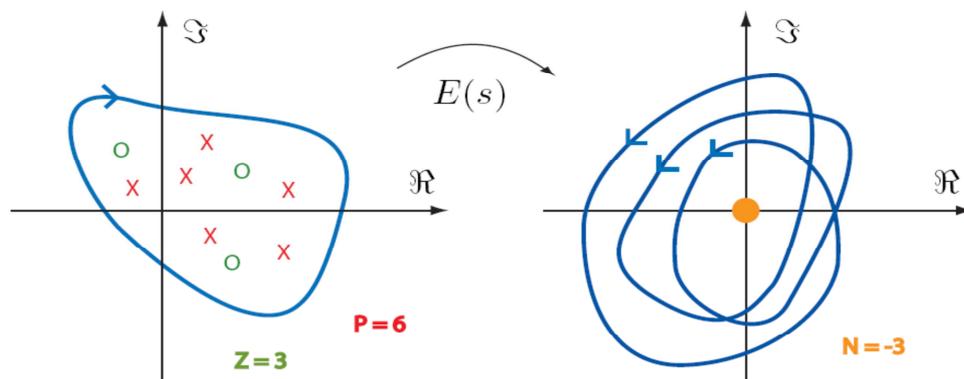


Figure.5.15. Nbr. de zéros : $Z = 3$; Nbr. de pôles : $P = 6$; Nombre de tours $N = Z - P = -3$, 3 tours dans le sens contraire.

b) **Critère de Nyquist** : Conséquence du théorème des résidus lorsque :

$$E(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (4.38)$$

Théorème :

- ✓ On prend l'axe imaginaire du plan s , c.-à-d. $j\omega, \omega \in]-\infty, +\infty[$.
- ✓ On prend son image par $G(s)H(s)$
- ✓ N = nombre de fois que $G(j\omega)H(j\omega)$ encercle -1 (sens trigonométrique négatif).
- ✓ P = nombre de pôles de $G(s)H(s)$ instables (pôles instables de $1 + G(s)H(s)$)
- ✓ $Z = N + P$ = nombre de pôles instables de la boucle fermée (zéros instables de $1 + G(s)H(s)$)

c) **Fiabilité de l'analyse par le premier harmonique**

- 1- L'amplitude et la fréquence prédites ne sont pas exactes.
- 2- un cycle limite prévu ne se produit pas.
- 3- un cycle limite existant n'est pas prédit.

CHAPITRE 5 : PASSIVITE

5.1 Introduction

Le but de présent chapitre consiste, en quelque sorte, à étendre le concept d'énergie à une plus large classe de système. Il s'agit ici d'envisager la présence d'une entrée u supplémentaire $\dot{x} = f(x, u)$.

Lyapunov : système sans entrée:

$$\dot{x} = f(x), \quad \frac{d}{dt}V \leq 0 \quad (5.1)$$

Passivité : système entrée-sortie :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad \dot{V} \leq \text{Puissance fournie} \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Notion intuitive

Système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (5.3)$$

Possède à la fois une entrée u et une sortie $y = h(x, u)$. L'entrée est utilisée pour injecter ou soutirer de la puissance. Ce système est passif lorsque la puissance soutirée se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance.

5.2.1 Résistance électrique

Un simple calcul donne aisément

$$ui = Ri^2 \quad (5.4)$$

et confirme que la puissance instantanée est effectivement instantanément dissipée dans la résistance électrique.



Figure.5.1. La résistance électrique est un système statique passif

5.3 Système statique passif

Les systèmes passifs les plus simples sont ceux qui ne comportent pas de dynamique. La sortie est directement fonction de la valeur de la grandeur d'entrée. Pour un système statique passif

$$uy = g, \quad g > 0 \quad (5.4)$$

Ceci signifie que la caractéristique statique doit nécessairement se trouver dans le premier et le troisième quadrant, conformément à ce qui est représenté à la **figure 5.2**.

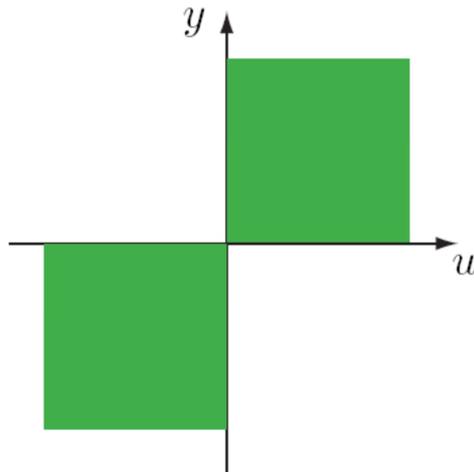


Figure.5.2. Représentation graphique d'un système passif statique : La caractéristique doit appartenir au secteur représenté en vert solide.

5.3.1 Exemple d'un système dynamique passif

Circuit R-L-C

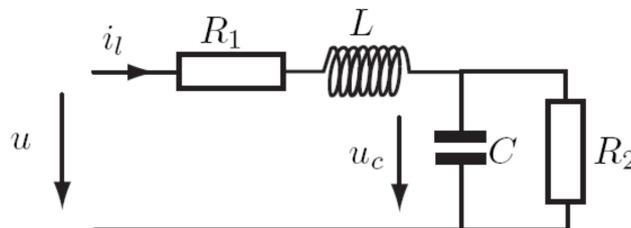


Figure.5.3. Un circuit électrique RLC est un système dynamique

Fonction de stockage est :

$$V = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li_l^2 \quad (5.5)$$

La dynamique du système est :

$$\begin{cases} u = R_1 i_l + L \frac{di_l}{dt} + u_c \\ i = C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R_2} \end{cases} \quad (5.6)$$

En posant $x_1 = i_l$ et $x_2 = u_c$, on arrive à la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2 C}x_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

On peut donc calculer l'évolution du stockage dans le temps:

$$V = \frac{1}{2}Cx_2^2 + \frac{1}{2}Lx_1^2 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 \\ &= ux_1 - R_1x_1^2 - x_1x_2 + x_2x_1 - \frac{1}{R_2}x_2^2 \\ &= ux_1 - R_1x_1^2 - \frac{1}{R_2}x_2^2 \end{aligned}$$

En considérant la sortie $y = i_l = x_1$

$$\dot{V} = uy - g(x) \quad (5.9)$$

$$g(x) = R_1x_1^2 + \frac{1}{R_2}x_2^2 \quad (5.10)$$

Ainsi la puissance en entrée est

- soit stockée
- soit dissipée

5.4 Définition différentielle de la passivité

Définition 5.1 : soit le système

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

S'il existe $V > \gamma > 0$ et $g \geq 0$ tels que $\dot{V} = u^T y - g$, alors le système est passif.

5.5 Définition intégrale de passivité

Définition 5.2: Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, avec

$$\int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau > \alpha \quad (5.11)$$

alors le système est passif.

5.5.1 Equivalence avec la définition différentielle :

$$\int \dot{V}(\tau) d\tau = \int (u(\tau)y(\tau) - g) d\tau \leq \int u(\tau)y(\tau) d\tau$$

$$\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0) \leq \int u(\tau)y(\tau) d\tau$$

5.6 Propriétés

5.6.1 La connexion en parallèle préserve la passivité

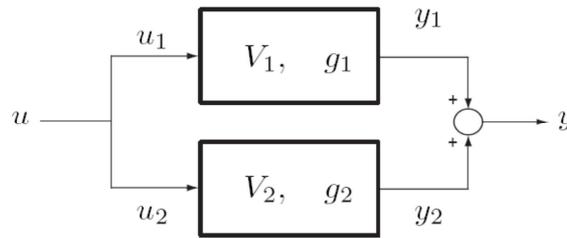


Figure.5.4. Connexion en parallèle.

Justification :

$$\dot{V}_1 = u_1^T y_1 - g_1 \tag{5.12}$$

$$\dot{V}_2 = u_2^T y_2 - g_2 \tag{5.13}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2$$

avec $u_1 = u_2 = u$

$$\dot{V} = u^T (y_1 + y_2) - (g_1 + g_2) = u^T y - g \tag{5.14}$$

5.6.2 La connexion en rétroaction préserve la passivité

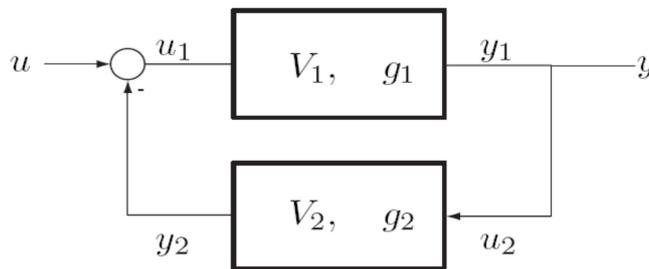


Figure.5.5. Connexion en rétroaction.

Justification :

$$\dot{V}_1 = u_1^T y_1 - g_1$$

$$\dot{V}_2 = u_2^T y_2 - g_2$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1^T y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= (u^T - y_2^T) y_1 + u_2^T y_2 - g_1 - g_2 \\ &= u^T y_1 - y_2^T y_1 + y_1^T y_2 - (g_1 + g_2) \\ &= u^T y - g \end{aligned}$$

Avec $g = g_1 + g_2$ et $y = y_1$

5.7 Passivité des systèmes linéaires

Soit une fonction de transfert donnée comme une fraction rationnelle en variable de Laplace s .

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{5.15}$$

Théorème 5.1:

le système $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ est passif $\Leftrightarrow \Re(G(j\omega)) \geq 0$

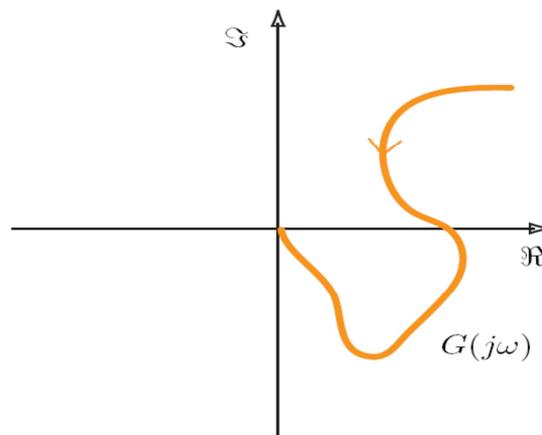


Figure.5.6. Diagramme de Nyquist d'un système linéaire SISO passif.

5.7.1 Passivité et réponse harmonique

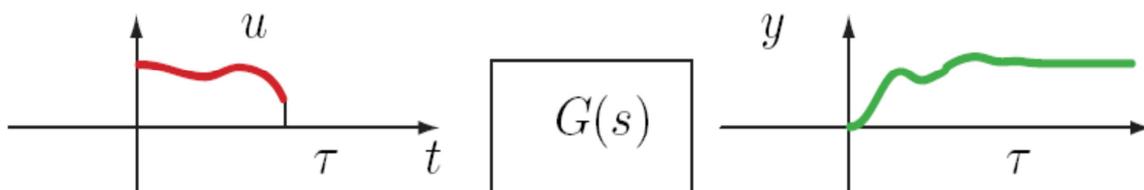


Figure.5.7. Illustration pour la démonstration de la passivité SISO passif.

Le système est soumis à un signal d'entrée non nul sur un horizon temporel de 0 à τ . L'entrée est nulle avant le temps initial $t = 0$ et ensuite abrupement arrêté pour tout instant t supérieur à τ . La sortie par contre n'a aucune raison de revenir à zéro pour tout instant supérieur à τ . La clé de la démonstration réside dans le fait que le bilan de puissance sur tout l'horizon temporel est égal au bilan sur tout le spectre. *Le célèbre théorème de Parseval est donc utilisé.*

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} u(\tau)y(\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(\tau)d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)U^*(j\omega)d\omega, \quad (\text{Parseval}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 G(j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(-j\bar{\omega})|U(-j\bar{\omega})|^2d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$u(t) \text{ Réel} \rightarrow U(j\omega) = U^*(-j\omega)$$

$$|U(-j\omega)|^2 = U(-j\omega)U^*(-j\omega) = U(j\omega)U^*(j\omega) = |U(j\omega)|^2 \tag{5.17}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} u(\tau)y(\tau)d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(-j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega)|U(j\omega)|^2d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [G(-j\omega) + G(j\omega)]|U(j\omega)|^2d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(G(j\omega))|U(j\omega)|^2d\omega
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\Re(G(j\omega)) \geq 0, \forall \omega > 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} u(\tau)y(\tau)d\tau > \alpha, \alpha > -\infty$$

La démonstration procède maintenant par l'absurde, c'est-à-dire que l'on suppose que dans le système viole le principe que la partie réelle de la réponse harmonique puisse avoir une partie réelle négative. Ainsi supposons que dans la plage de fréquence $\exists \omega_1, \omega_2 \rightarrow \Re(G(j\omega)) < 0 \forall \omega \in (\omega_1, \omega_2)$. ce cas est représenté à la **figure 5.8**.

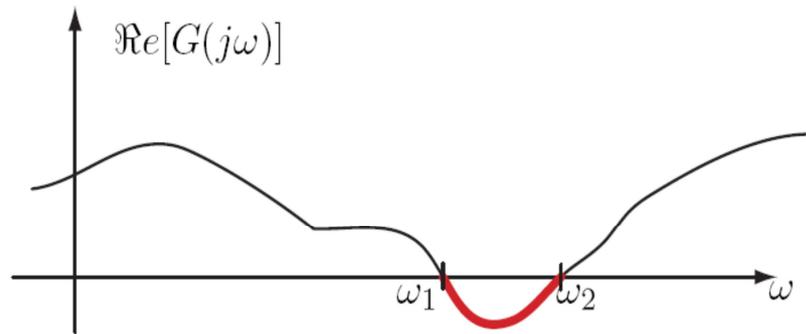


Figure.5.8. La partie réelle est négative pour dans la plage fréquentielle] ω₁, ω₂[.

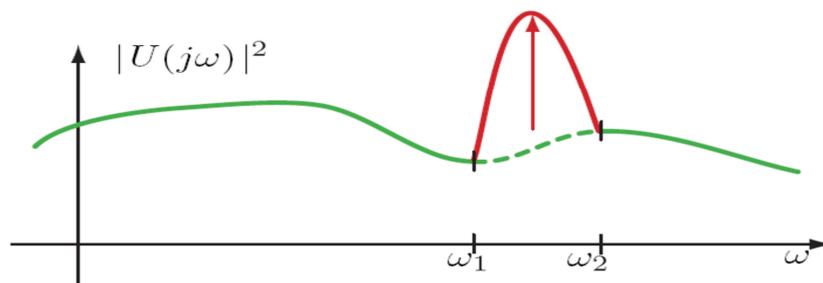


Figure.5.9. L'énergie dans la plage de fréquence] ω₁, ω₂[est augmentée de manière arbitraire.

En écrivant ceci de manière calculatoire,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \Re(G(j\omega))|U(j\omega)|^2 d\omega (\geq 0) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Re(G(j\omega))|U(j\omega)|^2 d\omega (< 0) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_2}^\infty \Re(G(j\omega))|U(j\omega)|^2 d\omega (\geq 0)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

En conséquence, si

- (A) $\exists \omega_1, \omega_2 \rightarrow \Re(G(j\omega)) < 0 \forall \omega \in (\omega_1, \omega_2)$, on a,
- ↓
- (B) $\forall \alpha > -\infty, \exists u(t)$ tel que, $\int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau < \alpha$

En utilisant la contraposée, ($A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \Leftarrow \bar{B}$), donc

$\Re(G(j\omega)) \geq 0, \forall \omega > 0 \Leftarrow \exists \alpha > -\infty, \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau > \alpha, (\forall u(t))$, et nous

$\Re(G(j\omega)) \geq 0, \forall \omega > 0 \Leftarrow$ *Passivité*

5.8 Système réel positif

Le théorème précédent conduit naturellement à définir une classe de systèmes linéaires en fonction de la partie réelle de leur réponse harmonique.

Définition 5.3 : $G(s)$ est réelle positive (**RP**) si,

$$\Re(G(j\omega)) \geq 0, \forall \Re(s) \geq 0 \tag{5.20}$$

Et strictement réelle positive (**SRP**) si,

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } G(s - \epsilon) \text{ est RP.} \tag{5.21}$$

Théorème 5.2 : une fonction de transfert $G(s)$ est **SRP** si et seulement si

- 1) $G(s)$ est strictement stable (sans pôles sur l'axe imaginaire)
- 2) $\forall \omega \geq 0 \Rightarrow \Re(G(j\omega)) > 0$

5.8.1 Degré relatif et minimum de phase

La fonction de transfert peut être mise sous forme de fraction rationnelle de polynômes factorisés de telle sorte que les zéros et les pôles apparaissent de manière explicite.

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=0}^m (s - z_i)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)} \tag{5.22}$$

Degré relatif : Le degré relatif noté $d^o r$ est défini comme la différence

$$d^o r = n - m \tag{5.23}$$

Où n est le nombre de pôles de la fonction de transfert et m , le nombre de zéros. Etant donné qu'un système physique est causal, cette différence sera toujours considérée positive ou nulle.

5.8.2 Minimum de phase

Un système linéaire est dit à minimum de phase si tous ces zéros ont une partie réelle strictement négative. i.e.

$$\Re(z_i) < 0, i = 1, \dots, m. \tag{5.24}$$

Exemple 1 : degré relatif = 2

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 1)}$$

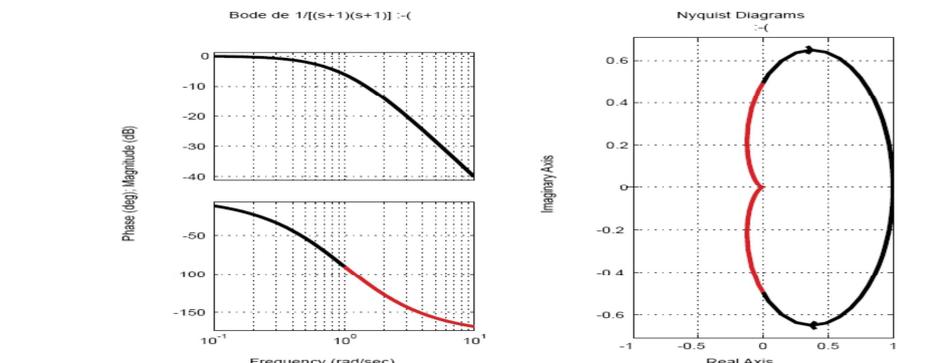


Figure.5.10 : Toute la réponse harmonique possède une partie réelle négative. Le degré relatif est $d^o r = 2$.

Exemple 2 : degré relatif = 1, instable

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 1)}$$

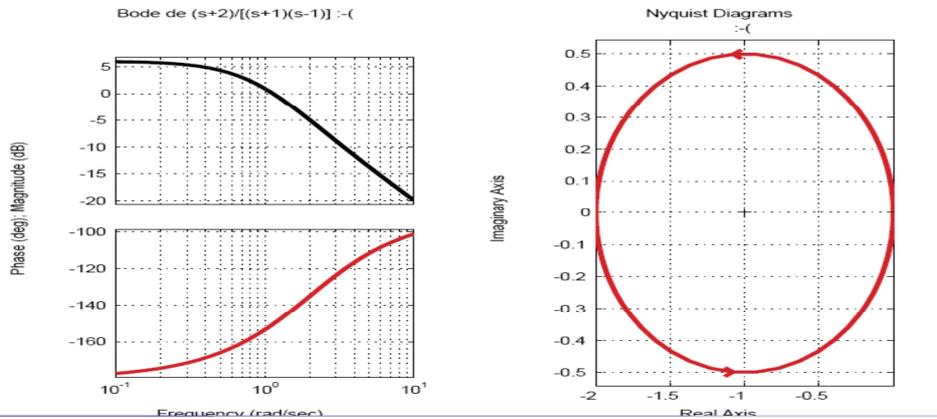


Figure.5.11 : Une partie de la réponse harmonique possède une partie réelle négative. Le degré relatif est $d^o r = 1$, mais le système est instable.

Exemple 3 : degré relatif = 1, stable et non minimum de phase

$$G(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)(s + 1)}$$

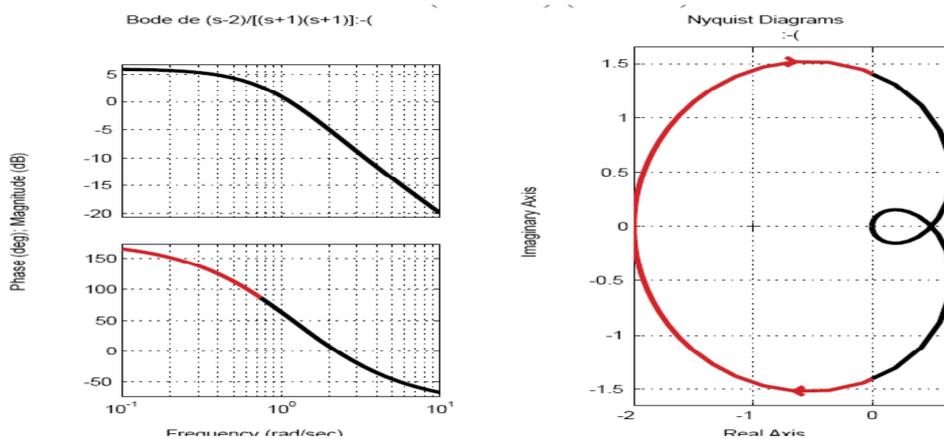


Figure.5.12: La réponse harmonique possède une partie réelle négative le degré relatif est $d^o r = 1$. Le système est stable, mais il n'est pas à phase minimale.

Exemple 4 : degré relatif = 1, stable et minimum de phase

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 1)}$$

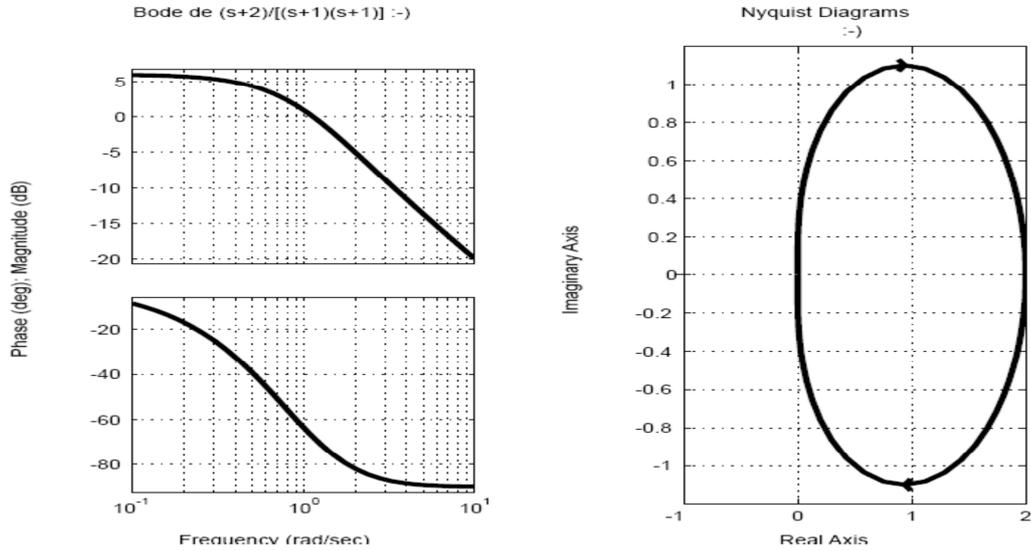


Figure.5.13: La réponse harmonique possède une partie réelle négative, le degré relatif est $d^o r = 1$. Le système est stable, et à phase minimale.

5.9 Passivité des systèmes linéaires et équation de Lyapunov

5.9.1 Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov

Lemme : Soit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ une fonction de transfert correspondant à un système qui est à la fois commandable,

$$\text{Rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \tag{5.25}$$

et observable

$$\text{Rang}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T) = n \tag{5.26}$$

$G(s)$ est Strictement Réelle Positive (SRP)

⇔

∃ $P > 0$ et $Q > 0$ telle que

$$\begin{cases} A^T P + PA = -Q \\ PB = C^T \end{cases} \tag{5.27}$$

5.9.2 Condition de suffisance

Théorème : Si un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ admet deux matrices symétriques définies positives P et Q qui satisfont les deux équations

$$\begin{cases} A^T P + PA = -Q \\ PB = C^T \end{cases}$$

alors le système est passif avec comme fonction de stockage interne

$$V = \frac{1}{2} x^T P x \quad (5.28)$$

et comme terme de dissipation

$$g = \frac{1}{2} x^T Q x \quad (5.29)$$

Démonstration

$$A^T P + PA = -Q$$

Posons $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$ et calculons sa dérivée

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}) \\ &= \frac{1}{2} [(Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)] \\ &= \frac{1}{2} x^T (A^T P + PA) x + u B^T P x \\ &= -\frac{1}{2} x^T Q x + u B^T P x \end{aligned}$$

Lorsque

$$y = B^T P x = C x$$

on obtient

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} x^T Q x + u y \\ &= u y - g \end{aligned}$$

de telle sorte que le système est passif avec

$$V = \frac{1}{2} x^T P x \text{ et } g = \frac{1}{2} x^T Q x$$

Remarque : plusieurs P sont obtenus par la résolution de la fonction de Lyapunov $A^T P + PA = -Q$. Un seul sera tel que $PB = C^T$.

5.10 Système linéaire et non linéarité statique

- La non-linéarité appartient à un secteur.
- La stabilité d'un point d'équilibre sera exclusivement traitée.
- Les résultats ne seront pas approximatifs, mais exacts.

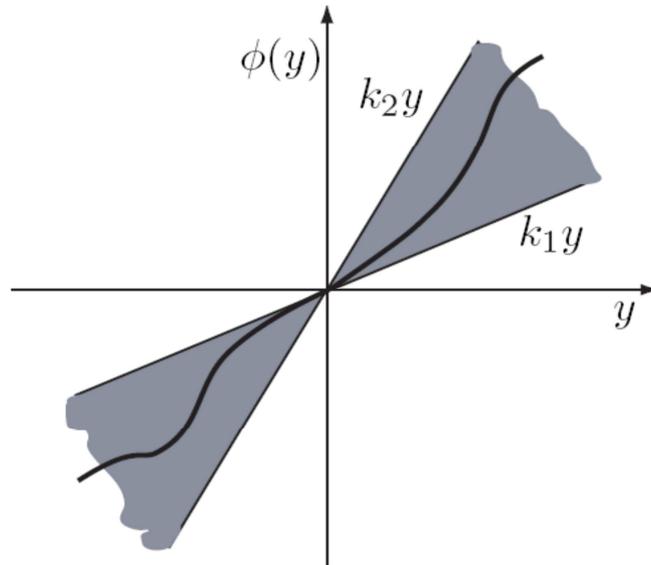


Figure.5.14: Un secteur délimite la région dans laquelle la non-linéarité statique peut se trouver.

5.10.1 Non-linéarité statique de secteur

Définition 5.4 : Une non-linéarité Φ est de type secteur $[k_1, k_2]$ lorsque

$$\forall y \neq 0 \Rightarrow k_1 y \leq \Phi(y) \leq k_2 y \quad (5.30)$$

5.10.2 Définition de la stabilité absolue

Un système linéaire est bouclé par une non-linéarité statique $u = -\Phi(y)$, où y est la sortie du système linéaire et u son entrée.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B\Phi(y) \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Définition 5.5:

un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ est dit stable de manière absolue vis-à-vis de la non-linéarité Φ de secteur $[k_1, k_2]$, si le système résultant est stable au sens de Lyapunov quel que soit $\Phi(y) \in [k_1, k_2]$,

5.10.3 Conjecture de M. A. Aizerman

Conjecture

$$\forall k \in [k_1, k_2], \Re(\lambda_i(A - BCk)) < 0, i = 1 \dots n.$$

↓

Le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, bouclé par une non-linéarité secteur $u = -\Phi(y)$ avec $\Phi(y)$ appartenant au secteur $[k_1, k_2]$, est stable.

Remarque : Cette conjecture est fautive comme il le sera illustré

5.10.4 Critère du cercle

Théorème 1 :

Si $0 < k_1 < k_2$, et $G(j\omega)$ ne rentre pas dans le disque $D(k_1, k_2)$ et $G(j\omega)$ encercle ρ fois dans le sens trigonométrique positif, alors le système est stable au sens absolu.

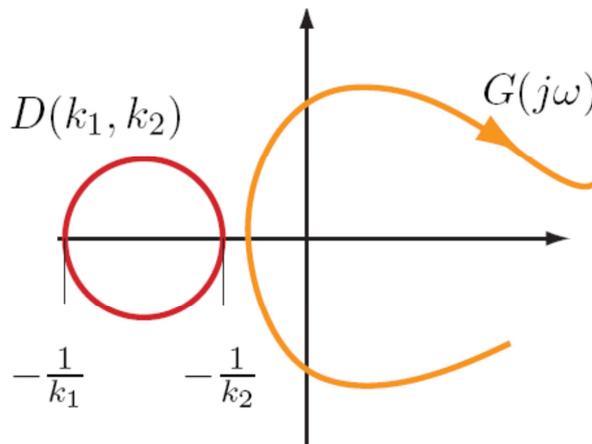


Figure.5.15: Critère du cercle lorsque $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$.

Théorème 2

Si $0 = k_2 < k_1$, $G(s)$ et que tous les pôles de $G(s)$ ont une partie réelle strictement négative et que le réponse harmonique $G(j\omega)$ se trouve à droite de la droite verticale passant par $-\frac{1}{k_1}$ alors le système est stable au sens absolu.

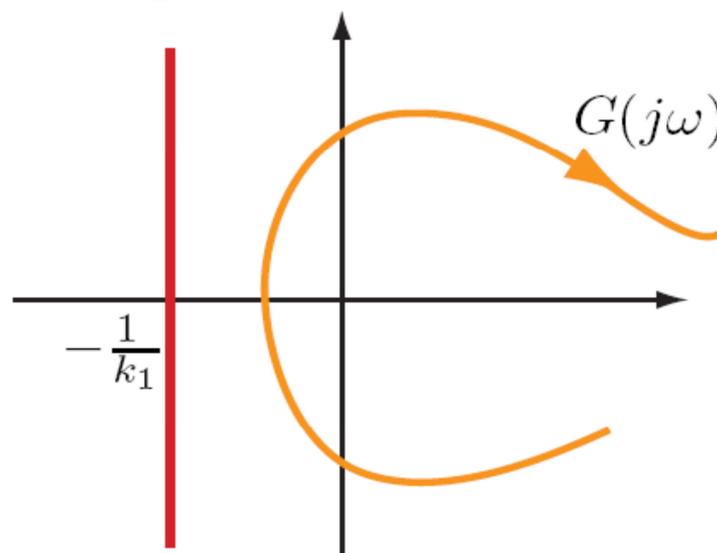


Figure.5.16: Critère du cercle lorsque $0 = k_2 < k_1$.

Théorème 3

Finalement, si $k_1 < 0 < k_2$ et que tous les pôles de $G(s)$ sont à partie réelle strictement négative et que $G(j\omega)$ est entièrement inscrit à l'intérieur du cercle $D(k_1, k_2)$, alors le système est stable au sens absolu.

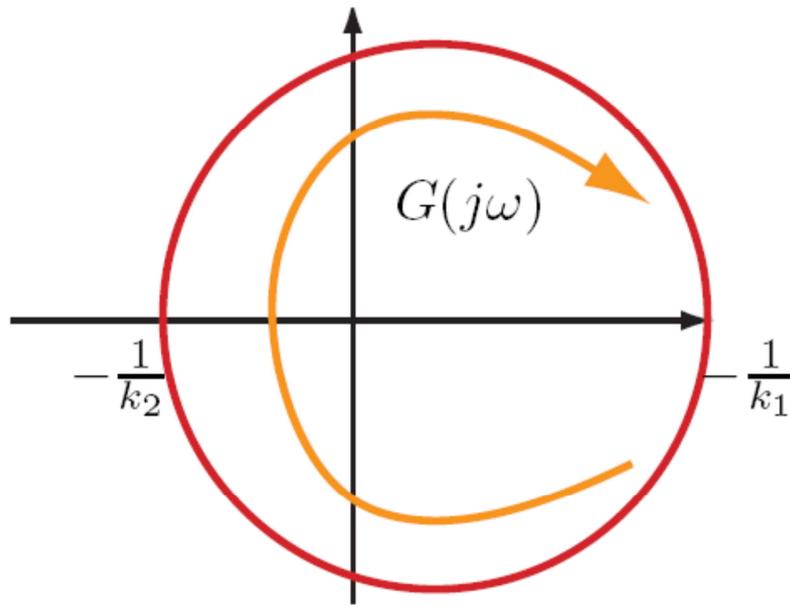


Figure.5.17: Critère du cercle lorsque $k_1 < 0 < k_2$.

5.10.5 Démonstration de stabilité asymptotique,

$\Phi \in [0, +\infty]$

$k_1 = 0, k_2 = +\infty$ Signifiant

$$\Re(G(j\omega)) \geq 0 \Rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B \text{ est positive réelle} \tag{5.31}$$

Pour être plus précis, sous la condition que la partie réelle de la réponse harmonique est supérieure à zéro, il existe une certaine matrice définie positive P satisfaisant simultanément ;

$$\begin{cases} A^T P + PA = -Q \\ PB = C^T \end{cases}$$

Il est important de noter que le choix de cette matrice est liée aux propriétés entrée-sortie donné par les matrices B et C .

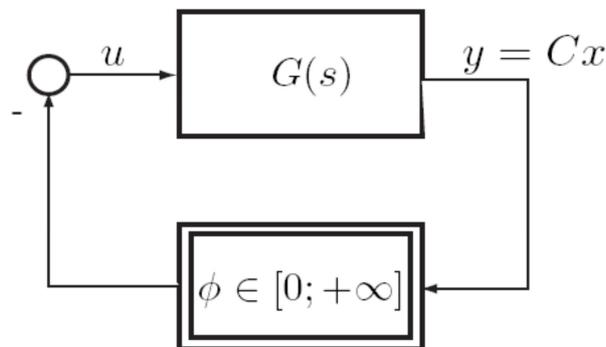


Figure.5.18: Diagramme de blocs de la cascade entre un système linéaire

Démonstration de stabilité asymptotique

Pour aboutir à la stabilité dans le schéma bouclé ci-dessus, on considère la relation $u = -\Phi(y)$ et la fonction de Lyapunov associée à P , c.-à-d.

$$V = \frac{1}{2} x^T P x$$

dont la dérivée temporelle

$$\dot{V} = \frac{1}{2} x^T P \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T P x$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x + x^T P B u$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x + x^T C^T u$$

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x - y^T \Phi(y)$$

Montre que sous la condition $\Phi \in [0; +\infty[$ (de telle sorte que $y^T \Phi(y) \geq 0$) la dérivée de la fonction de Lyapunov est strictement plus petite que zéro.

Secteur $[k_1; k_2]$

On note $[\Phi]$ pour l'opérateur entrée-sortie associé à la fonction $\Phi(y)$. Pour transformer le secteur $[k_1; k_2]$ en un secteur $[0; +\infty[$:

$$\frac{1}{[\Phi] - k_1} - \frac{1}{k_2 - k_1}$$

En inversant cette expression, on obtient toujours une non-linéarité secteur $[0; +\infty[$,

$$\frac{1}{\frac{1}{[\Phi] - k_1} - \frac{1}{k_2 - k_1}} = \frac{[\Phi] - k_1}{1 - \frac{1}{k_2 - k_1}([\Phi] - k_1)} \tag{5.32}$$

5.10.6 Bouclages associés

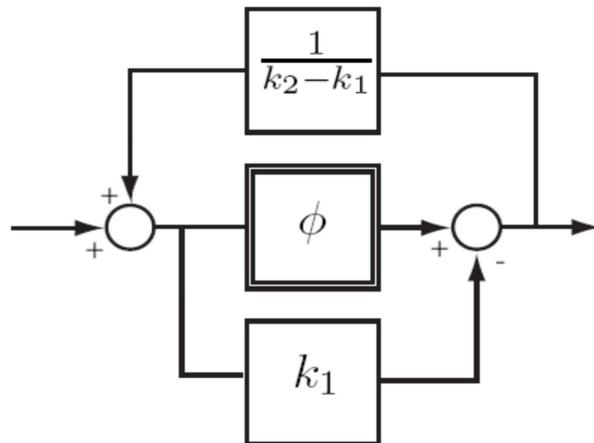


Figure.5.19: Bouclages permettant de modifier une non-linéarité de secteur $[k_1; k_2]$ en une non-linéarité de secteur $[0; +\infty[$.

5.10.7 Compensation complète

Nouvelle fonction de transfert : En isolant la non-linéarité transformée par les bouclages, un nouveau système linéaire $\tilde{G}(s)$ est identifié :

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} + \frac{1}{k_2 - k_1} = \left(\frac{\frac{1}{k_2} + G(s)}{\frac{1}{k_1} + G(s)} \right) \left(\frac{k_2}{k_1} \left(\frac{1}{k_2 - k_1} \right) \right) \quad (5.33)$$

Démontrons le premier cas du critère du cercle où $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$. Comme, d'une part, $k_2 > k_1$ (propriété de la définition du secteur), le second facteur du dernier membre de l'équation précédente est toujours positif, et, d'autre part, $\tilde{G}(s)$ doit être strictement positif réelle, nous aboutissons à la condition

$$\Re \left(\frac{\frac{1}{k_2} + G(j\omega)}{\frac{1}{k_1} + G(j\omega)} \right) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (5.34)$$

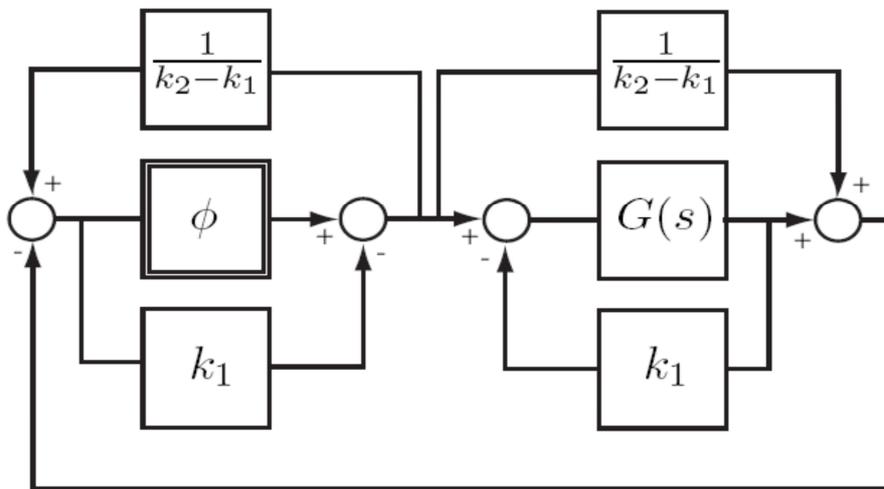


Figure 5.20: Les bouclages introduits se compensent parfaitement conduisant le schéma ci-dessus à être identique au bouclage de $G(s)$ par la non-linéarité Φ .

5.10.8 Représentation graphique du critère du cercle

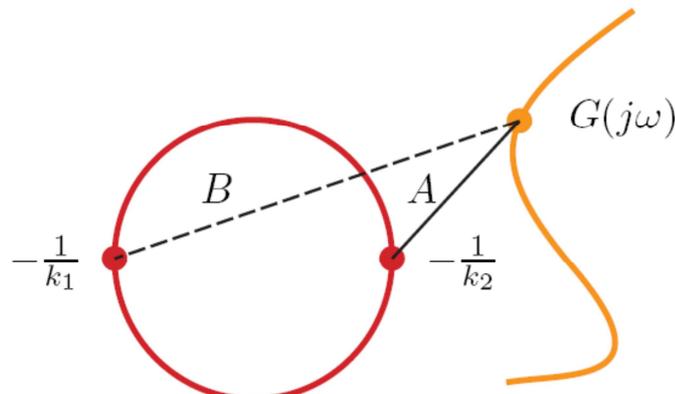


Figure 5.21: Trait plein $A = \frac{1}{k_2} + G(j\omega)$ Trait hachuré $B = \frac{1}{k_1} + G(j\omega)$

Lorsque $k_2 > k_1 > 0$, $G(j\omega)$ est à l'extérieur du cercle signifie...

En utilisant la représentation graphique

$$\Re\left(\frac{A}{B}\right) > 0 \Leftrightarrow |\arg(A) - \arg(B)| < \frac{\pi}{2} \quad (5.35)$$

Ce qui conduit à ce que la valeur absolue de la différence entre les arguments de $A = \frac{1}{k_2} + G(j\omega)$ et de $B = A = \frac{1}{k_1} + G(j\omega)$ reste inférieure à $\frac{\pi}{2}$

Conséquence :

$G(j\omega)$ est à l'extérieur au cercle $\Leftrightarrow \tilde{G}(j\omega)$ est une fonction réelle positive

5.10.9 Critère de Popov

Le critère de Popov est, tout comme le critère du cercle, une exploitation de la propriété de passivité lors de l'interconnexion d'un système linéaire et d'une non-linéarité de type secteur. Nous donnons le résultat sans démonstration.

Théorème :

$\forall \lambda \Re(\lambda(A)) < 0$ et (A, B) Commandable

➤ Non-linéarité Φ de type secteur

➤ $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall \omega \geq 0, \Re[(1 + j\alpha\omega)G(j\omega)] + \frac{1}{k} \geq \epsilon \quad (5.36)$$

Pour une certaine valeur de $\epsilon > 0$

0 est globalement asymptotiquement stable

CHAPITRE 6 : COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

6.1 Introduction

L'idée de cette technique s'appuie d'une part, sur la remarque que le principal obstacle dans la synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires est la présence des non linéarités dans le modèle et d'autre part, qu'il existe un nombre important de techniques efficaces de synthèse dans le cas de modèles linéaires. Si l'on est capable par des transformations adéquates de transformer le modèle non linéaire en un modèle linéaire, on peut ensuite utiliser les techniques de synthèse de lois de commande des systèmes linéaires. C'est la philosophie de la linéarisation par bouclage.

Nous considérons les systèmes décrits par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \\ y &= h(x) \quad y \in \mathbb{R}^q \end{aligned} \quad (6.1)$$

Différents problèmes de commande :

- **Stabilisation :** Maintenir le système autour d'une position d'équilibre par une loi de commande adaptée.
- **Poursuite :** Calculer une loi de commande pour que le système (sa sortie) suive une trajectoire donnée.
- **Anticipation :** Rajouter un terme d'anticipation pour essayer de compenser l'effet des perturbations connues a priori.

6.1.1 Stabilisation

Définition 6.1 (Stabilisation asymptotique) : Le problème de stabilisation asymptotique consiste à chercher une loi de commande u telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0 \quad \forall x(0) \in \phi \quad (6.2)$$

- Lorsque la loi de commande s'exprime directement en fonction de la mesure on parle de **loi de commande statique**.
- Lorsque la loi de commande s'exprime comme une équation différentielle entre u et la mesure y , on parle de **loi de commande dynamique**.

Le domaine ϕ est **grand**, on ne peut pas procéder par linéarisation et donc par une approche linéaire.

6.1.2 Poursuite

Définition 6.2 (Poursuite asymptotique) : Soit une sortie désirée $y_d(t)$. Le problème de poursuite asymptotique consiste à chercher une loi de commande telle que

- l'erreur de poursuite définie par $e(t) = y(t) - y_d(t)$ satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow 0 \quad \forall x(0) \in \phi \quad (6.3)$$

- l'état $x(t)$ reste borné.

L'état $x(t)$ doit rester borné dans un domaine où le modèle reste valable. Les possibilités de poursuite asymptotique ou poursuite exacte dépendent des propriétés structurelles du système.

6.1.3 Anticipation

Pour la poursuite il est souvent nécessaire de faire intervenir **un terme d'anticipation** dans la loi de commande : $u = \text{terme de boucle fermée} + \text{terme d'anticipation}$. Le terme d'anticipation permet de compenser l'effet des perturbations connues a priori. Il permet d'annuler l'erreur de poursuite (inversion du système) tandis que le terme de boucle fermée permet de stabiliser le système.

6.2 Linéarisation locale et stabilisation

Le présent chapitre aborde les techniques qui ont comme objectif d'exploiter la possibilité d'utiliser des techniques linéaires pour la synthèse d'une loi de commande en essayant de garantir un ensemble de stabilité le plus grand possible. Cette méthode de linéarisation est très répandue, car c'est sans doute la méthode la plus simple permettant d'utiliser un paradigme linéaire pour la synthèse. En partant du système initial

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.4)$$

où l'on suppose sans perte de généralité que $f(0, 0) = 0$, une représentation d'état d'un système linéaire équivalent est calculée

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.5)$$

Les matrices A et B sont alors donnée respectivement par

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$$

Ensuite, un régulateur d'état $u = -Kx$ est élaboré qui transforme le système dynamique initial $\dot{x} = f(x, u)$ en $\dot{x} = f(x, -Kx) = \hat{f}(x)$. L'analyse du système au premier ordre de la dynamique résultante s'écrit

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right|_{x=0} x = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} \frac{du}{dx} \right) x = (A - BK)x \quad (6.6)$$

Lorsque la paire A et B est commandable, il est possible d'assigner les pôles du système en boucle fermée de manière arbitraire en utilisant le vecteur de gains K (en utilisant la formule d'Ackermann par exemple). En conséquence, $\forall Q > 0, \exists P > 0$ tel que l'équation de Lyapunov du système linéaire transformé soit vérifiée :

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -Q \quad (6.7)$$

Le candidat de Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$ devient une fonction de Lyapunov valable localement.

6.3 Linéarisation par bouclage d'état

La méthode de linéarisation exposée à la section précédente n'est valable que localement. C'est uniquement autour de la valeur nominale, où est effectué le développement de Taylor de la fonction $f(x, u)$, que l'approximation donne de bons résultats. Lors de grands écarts, les termes d'ordre élevés l'emportent sur les premiers termes du développement, et l'approximation est alors souvent inutile.

Il existe toutefois d'autres approches pour améliorer la taille de la validité de la linéarisation. Elles reposent toutes plus ou moins sur l'idée de changer la représentation du système initial pour corriger l'effet néfaste des termes d'ordre supérieur.

6.3.1 Linéarisation entrée/état

Soit le système non linéaire mono-entrée

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (6.8)$$

Le problème de linéarisation entrée/état consiste dans un premier temps à chercher un changement d'état.

$$z = \varphi(x) \quad (6.9)$$

et une transformation de l'entrée

$$u = U(x, v) \quad (6.10)$$

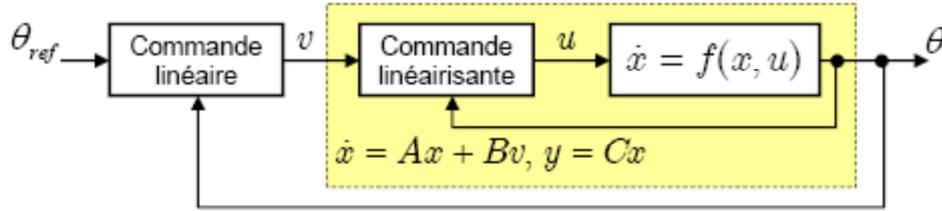
Tels que le système non linéaire est transformé en un système linéaire invariant équivalent sous la forme

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (6.11)$$

Exemple 6.1 : pendule simple

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{Ml^2} u \end{pmatrix} \Rightarrow u = Ml^2 \left(v + \frac{g}{l} \sin(x_1) \right) \quad (6.12)$$

$$v = -\frac{g}{l} \sin(x_1) + \frac{1}{Ml^2} u \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ v \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

**Figure 6.1** : Schéma de linéarisation par bouclage d'état**Exemple 6.2** : système mécanique complètement actionnés

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (6.14)$$

$$q \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^n, M(q), C(q, \dot{q}), B(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}, G(q) \in \mathbb{R}^n$$

Supposons que $B(q)$ est inversible, alors une commande linéarisante est donnée par

$$u = B(q)^{-1}M(q)(v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)) \quad (6.15)$$

Le système dans les coordonnées linéarisées est :

$$\ddot{q} = v \quad (6.16)$$

Le système est aussi découplé :

$$\ddot{q}_i = v_i, i = 1, \dots, n \quad (6.17)$$

La commande linéaire PID : soit $q_{i_{ref}}$ la trajectoire de référence et $e_i = q_i - q_{i_{ref}}$ l'erreur de suivi, la commande PID est

$$v_i = \ddot{q}_{i_{ref}} - K_{Pi}e_i - K_{Di}\dot{e}_i - K_{Ii} \int_0^t e_i d\tau, i = 1, 2, \dots, k \quad (6.18)$$

$$\ddot{e}_i = \ddot{q}_i - \ddot{q}_{i_{ref}} = v_i - \ddot{q}_{i_{ref}} \quad (6.19)$$

$$\ddot{e}_i + K_{Pi}e_i + K_{Di}\dot{e}_i + K_{Ii} \int_0^t e_i d\tau = 0, i = 1, \dots, k \quad (6.20)$$

La dynamique d'erreur du système en boucle fermée est stable si

$$s^3 + K_{Di}s^2 + K_{Pi}s + K_{Ii} = 0, i = 1, \dots, k \quad (6.21)$$

sont des polynômes stables (Hurwitziens).

Remarque 6.1 : dans systèmes robotiques, on a en général $B(q) = I$ et la technique présentée dans cet exemple est appelée commande par couple calculé (computed torque control).

Remarque 6.2 : Les exemples précédents amène quelques questions auxquelles il faudra répondre.

- La première est : Quelle classe de systèmes non linéaires se prête à ces transformations ?
- La deuxième : Comment trouver les transformations adéquates et quel est leur domaine de validité ?

Dans les exemples précédents, si les conditions initiales sont en des singularités de la transformation, les propriétés de la commande ne sont pas celles attendues. De plus, il faut connaître assez précisément les paramètres des modèles sinon cela peut entraîner des erreurs importantes. En effet les transformations s'appuient sur la connaissance de ces paramètres.

6.3.2 Linéarisation entrée/sortie

Les problèmes de poursuite dans le cas des systèmes non linéaires sont difficiles car la sortie dépend de l'entrée de façon souvent très complexe. Il n'est pas aussi facile qu'en linéaire de calculer l'entrée permettant d'obtenir la sortie désirée. L'idée consiste, si c'est possible, à simplifier la relation entrée-sortie. C'est la philosophie de la linéarisation entrée/sortie. Cette méthode est illustrée sur l'exemple suivant

Exemple 6.3 : manipulateur flexible

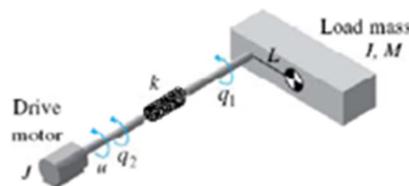


Figure 6.2 : manipulateur flexible

$$\ddot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0 \quad (6.22)$$

$$J\ddot{q}_2 + k(q_2 - q_1) = u \quad (6.23)$$

Modèle d'état

$$x_1 = q_1, x_2 = \dot{q}_1, x_3 = q_2, x_4 = \dot{q}_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{k}{I}x_1 + \frac{k}{I}x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{J}x_1 - \frac{k}{J}x_3 + \frac{1}{J}u\end{aligned}$$

Soit $y = x_1$ la sortie du système (la variable à régler), on a

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{k}{I}x_1 + \frac{k}{I}x_3 \\ \ddot{\ddot{y}} &= -\frac{MgL}{I}\dot{x}_1 \cos(x_1) - \frac{k}{I}\dot{x}_1 + \frac{k}{I}\dot{x}_3 = -\frac{MgL}{I}x_2 \cos(x_1) - \frac{k}{I}x_2 + \frac{k}{I}x_4 \\ y^{(4)} &= -\frac{MgL}{I}\dot{x}_2 \cos(x_1) + \frac{MgL}{I}x_2 \dot{x}_1 \sin(x_1) - \frac{k}{I}\dot{x}_2 + \frac{k}{I}\dot{x}_4 \\ &= -\left(\frac{MgL}{I}\cos(x_1) + \frac{k}{I}\right)\left(-\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{k}{I}x_1 + \frac{k}{I}x_3\right) + \\ &\quad + \frac{MgL}{I}x_2^2 \sin(x_1) + \frac{k}{I}\left(\frac{k}{J}x_1 - \frac{k}{J}x_3 + \frac{1}{J}u\right)\end{aligned}\quad (6.24)$$

On annulant la non linéarité par la commande

$$\begin{aligned}u &= \frac{JI}{k}\left(v - \left(\frac{MgL}{I}\cos(x_1) + \frac{k}{I}\right)\left(-\frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{k}{I}x_1 + \frac{k}{I}x_3\right) - \frac{MgL}{I}x_2^2 \sin(x_1) - \frac{k}{I}\left(\frac{k}{J}x_1 - \frac{k}{J}x_3\right)\right)\end{aligned}\quad (6.25)$$

On obtient

$$y^{(4)} = v \quad (6.26)$$

En définissant l'erreur de poursuite $e(t) = y(t) - y_d(t)$ et en prenant comme nouvelle entrée

$$v = y_d^{(4)} - k_1 e - k_2 \dot{e}$$

avec k_1 et k_2 positifs, l'erreur vérifie

$$e^{(4)} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 \quad (6.27)$$

Si les conditions initiales sur $e(t)$ sont nulles, alors on poursuit de manière exacte la trajectoire de référence, sinon $e(t)$ converge exponentiellement vers zéros.

Remarque 6.3 : On appelle ce nombre le degré relatif du système. En linéaire, il correspond à la différence entre le degré du numérateur et celui dénominateur de la fonction de transfert si le système est commandable et observable. On se rend compte également que l'équation définissant la dynamique de l'erreur est du second ordre alors que le système est d'ordre trois et que la commande ne rajoute pas de dynamique.

On peut en conclure qu'une partie du système n'apparaît pas dans ces équations. En fait, on l'a rendue inobservable et on appelle cette partie la dynamique interne. Pour résoudre le problème de poursuite, il faut s'assurer qu'elle est stable sinon le système n'aura pas le comportement souhaité. Toutes ces remarques et les problèmes qu'elles soulèvent doivent trouver une réponse si l'on veut connaître les limitations et les avantages de cette technique.

Exemple 6.4 : Soit le système non linéaire

$$\dot{x}_1 = \sin(x_2) + (x_2 + 1)x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$

$$y = x_1$$

6.3.3 Dynamique interne

Un point intéressant qui peut apporter une meilleure compréhension de ce qu'est la dynamique interne pour un système non linéaire est de voir ce qu'elle représente dans le cas linéaire.

Exemple 6.5 : Considérons le système linéaire

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1$$

Sa fonction de transfert est

$$G(p) = \frac{p + 1}{p^2}$$

On dérivant la sortie on a

$$\dot{y} = x_2 + u$$

qui traduit la relation entrée/sortie. En prenant $u = -x_2 + \dot{y}_d + (y_d - y)$ et $e = y_d - y$ on a

$$\dot{e} + e = 0$$

La dynamique interne est obtenue en remplaçant u dans la deuxième équation d'état, soit

$$\dot{x}_2 + x_2 = \dot{y}_d + e$$

Par hypothèse \dot{y}_d est bornée, d'autre part $y \rightarrow y_d$ (car $e \rightarrow 0$) entraînant que x_2 est bornée et donc également u : Le problème de poursuite est donc résolu de manière satisfaisante.

Exemple 6.6 : Considérons le système linéaire

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -u$$

$$y = x_1$$

Sa fonction de transfert est

$$G(p) = \frac{p-1}{p^2}$$

En suivant les mêmes étapes que précédemment, la dynamique interne est maintenant

$$\dot{x}_2 - x_2 = -\dot{y}_d - e$$

x_2 et donc u tendent vers l'infini. La commande n'est pas adaptée pour traiter le problème de poursuite. La seule différence entre les deux systèmes est que le premier est à minimum de phase et pas le deuxième. On peut montrer que cette propriété structurelle est à l'origine du problème. Si le système est à minimum de phase, il n'y aura pas de problème de stabilité pour la dynamique interne.

Il est intéressant de définir **le concept de minimum de phase pour les systèmes non linéaires** et voir les rapports qu'il peut y avoir avec la stabilité de la dynamique interne. Dans le cas linéaire, cette définition est assez simple car indépendante de la commande. Ce n'est pas le cas pour les systèmes non linéaires, mais les exemples précédents montrent la nécessité de se poser ces questions. En fonction de cette propriété, la procédure de linéarisation entrée/sortie sera applicable pour résoudre les problèmes de poursuite.

Exemple 6.7 : commande de *field-controlled DC motor*

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + k - cx_1x_3$$

$$\dot{x}_3 = dx_1x_2$$

x_1 et x_2 : courant de champs et d'armature

x_3 : vitesse de rotation

u : tension d'armature (le signal de commande)

a, b, c et d sont des constantes positives

En choisissant $y = x_3$ comme sortie du système, on a

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = dx_1x_2$$

$$\ddot{y} = d\dot{x}_1x_2 + dx_1\dot{x}_2 = d(-a_1x_1x_2 + ux_2) + dx_1(-bx_2 + k - cx_1x_3)$$

$$\ddot{y} = \varphi(x_1, x_2, x_3) + dx_2u \quad (6.28)$$

La dynamique entrée-sortie est de dimension 2 et il existe une dynamique interne (inobservable à la sortie) de dimension 1.

6.4 Outils mathématiques

L'extension des approches présentées dans les paragraphes précédents sur des exemples nécessitent l'introduction de certains outils de géométrie différentielle qui est une branche difficile des mathématiques. Dans ce qui suit, nous appellerons un champ de vecteurs f , une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Nous dirons que le champ de vecteurs f est lisse si ses dérivées partielles jusqu'à un ordre qui dépend du contexte sont continues. Chaque composante de f notée f_i est une fonction scalaire d'un vecteur. On définit son gradient comme

$$\nabla f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{j=1, \dots, n} \quad (6.29)$$

c'est un vecteur ligne

Par extension, on définit la matrice Jacobienne (ou Jacobien) du champ de vecteurs f . Comme il n'y aura pas d'ambiguïté, on le notera de la même manière

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_i = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{ij} \quad (6.30)$$

Il s'agit dans ce cas d'une matrice $n \times n$

6.4.1 Dérivée de Lie et Crochet de Lie

Définition 6.4.1: Soit une fonction scalaire lisse $h(x)$ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de vecteurs lisse f de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la *dérivée de Lie* de h par rapport à f est une fonction scalaire définie par

$$L_f h = \nabla h \cdot f = \frac{\partial h}{\partial x} f \quad (6.31)$$

La dérivée de Lie n'est rien d'autre que la dérivée directionnelle le long du vecteur f . Si g un autre champ de vecteur, alors on a

$$L_g L_f h = \nabla(L_f h) \cdot g \quad (6.32)$$

De plus, on a de manière récursive

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^1 h &= \nabla h \cdot f \\ &\vdots \\ L_f^k h &= L_f(L_f^{k-1} h) = \nabla(L_f^{k-1} h) \cdot f, \text{ pour } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.33)$$

Appliquons ces définitions sur le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x)$$

$$y = h(x)$$

On sera amené à considérer les dérivées de la sortie, soit

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h \\
\ddot{y} &= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h \\
y^{(3)} &= \frac{\partial(L_f^2 h)}{\partial x} \dot{x} = L_f^3 h \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= \frac{\partial(L_f^{n-1} h)}{\partial x} \dot{x} = L_f^n h
\end{aligned} \tag{6.34}$$

On voit que les notations introduites permettent de transformer des expressions complexes en des expressions plus concises et déterminées systématiquement un autre outil important est *le crochet de Lie* entre deux champs de vecteurs.

Définition 6.4.2 : Soient f et g deux champs de vecteurs. Le crochet de Lie entre f et g est un champ de vecteurs définis par

$$[f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \tag{6.35}$$

On note également le crochet de Lie entre f et g

$$[f, g] = ad_f g \text{ (*ad* pour adjoint)}$$

et la manière récursive

$$\begin{aligned}
ad_f^0 g &= g \\
ad_f^1 g &= [f, g] \\
ad_f^2 g &= [f, [f, g]] \\
&\vdots \\
ad_f^k g &= [f, ad_f^{k-1} g]
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Lemme 6.4.1 : Le crochet de Lie possède les propriétés suivantes

1) bilinéarité : Soient f, f_1, f_2, g, g_1 et g_2 des champs de vecteurs lisses et soient α et β deux scalaires, on a

$$[\alpha f_1 + \beta f_2, g] = \alpha [f_1, g] + \beta [f_2, g] \tag{6.37}$$

$$[f, \alpha g_1 + \beta g_2] = \alpha [f, g_1] + \beta [f, g_2] \tag{6.38}$$

2) Antisymétrie : Soient f et g deux champs de vecteurs, on a

$$[f, g] = -[g, f] \tag{6.39}$$

3) Identité de Jacobi : Soient f et g deux champs de vecteurs lisses et h une fonction scalaire lisse, on a

$$L_{ad_f g} h = \nabla h \cdot [f, g] = L_f L_g h - L_g L_f h \tag{6.40}$$

6.4.1.1 Difféomorphisme

On sait que la représentation d'état pour un système n'est pas unique. Pour les systèmes linéaires on passe d'une représentation d'état à une autre par un changement de base (nouveau vecteur d'état). Dans le cas des systèmes non linéaires, on peut généraliser cela en introduisant la notion de **difféomorphisme**.

Définition 6.4.3 : Soit une fonction φ de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie dans une région $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que φ est un *difféomorphisme* si φ est lisse et son inverse φ^{-1} existe et est lisse. Lorsque $D = \mathbb{R}^n$, on dit que l'on a un *difféomorphisme global*.

Il n'est pas toujours facile de trouver un difféomorphisme global. Une caractérisation est donnée dans le lemme suivant

Lemme 6.4.2 : Soit $\varphi(x)$ une fonction lisse de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie dans une région $D \subseteq \mathbb{R}^n$. $\varphi(x)$ est un difféomorphisme local dans une sous région de D contenant le point $x = x_0$, si sa matrice Jacobienne est non singulière en $x = x_0$.

Exemple 6.8 : Considérons le système non linéaire décrit par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u & (6.41) \\ y &= h(x) \quad \text{scalaire} \end{aligned}$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit un difféomorphisme et posons

4.4.1.2 Changement de coordonnées

$$z = \varphi(x) \tag{6.42}$$

En dérivant on a

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \tag{6.43}$$

Comme $x = \varphi^{-1}(z)$, on obtient une nouvelle représentation d'état qui s'écrit

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \right]_{x=\varphi^{-1}(z)}$$

$$y = h(\varphi^{-1}(z))$$

6.4.1.3 Théorème de Frobenius

Exemple 6.8 : Avant de rentrer dans des détails techniques, essayons de montrer à quoi peut servir ce théorème. Pour cela, considérons les champs de vecteurs suivants

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_3) \\ g_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Et une fonction scalaire

$$h(x) = h(x_1, x_2, x_3)$$

Définissons le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

$$L_f h = \nabla h \cdot f = 0$$

$$L_g h = \nabla h \cdot g = 0$$

De manière plus explicite

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 = 0 \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 = 0 \quad (6.45)$$

On suppose f et g connues. On cherche une solution h . Si une solution existe, on dit que le couple de champs de vecteurs (f, g) est *complètement intégrable*. Le théorème de Frobenius donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution. S'il existe deux fonctions scalaires $\beta_1(x_1, x_2, x_3)$ et $\beta_2(x_1, x_2, x_3)$, telle que le crochet de Lie

$$[f, g] = \beta_1 f + \beta_2 g \quad (6.46)$$

Il existe une solution h au système d'équations. On dit aussi que le couple (f, g) est involutif. Nous allons généraliser ces résultats pour un ensemble de champs m champs de vecteurs.

Définition 6.4.4: Soient f_1, f_2, \dots, f_m un ensemble de m champs de vecteurs de \mathbb{R}^n , linéairement indépendants. On dit que cet ensemble est complètement intégrable si et seulement si il existe $n - m$ fonctions scalaires h_1, h_2, \dots, h_{n-m} , telles que

$$\nabla h_i f_j = L_{f_j} h_i = 0, i = 1, 2, \dots, n - m \text{ et } 1 \leq j \leq m \quad (6.47)$$

et si les gradients ∇h_i sont linéairement indépendants. Il est important de noter que si l'on a m champs de vecteurs, le nombre de fonctions inconnues est $n - m$, n étant la dimension de x et le nombre d'équations aux dérivées partielles est $m(n - m)$. Dans l'exemple en début de paragraphe, $n = 3$; $m = 2$; $n - m = 1$.

Définition 6.4.5 : Soient f_1, f_2, \dots, f_m un ensemble de m champs de vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants. On dit que cet ensemble est involutif si et seulement si il existe des fonctions scalaires α_{ijk} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telles que

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x) \quad (6.48)$$

Cette dernière définition est une généralisation de la notion présentée dans l'exemple introductif. Si la condition de la définition précédente est satisfaite, alors

$$\text{Rang}[(f_1(x), \dots, f_m(x))] = \text{Rang}[(f_1(x), \dots, f_m(x) [f_i, f_j](x))]$$

pour tout x , i et j . Nous pouvons maintenant donner une condition nécessaire et suffisante de complète intégrabilité de l'ensemble f_1, f_2, \dots, f_m .

Théorème 6.5.1: Soient f_1, f_2, \dots, f_m un ensemble de m champs de vecteurs de \mathbb{R}^n linéairement indépendants. Cet ensemble est complètement intégrable si et seulement si il est involutif.

Il s'agit d'une condition d'existence, mais pas d'une méthode permettant de calculer une solution.

6.4.2 Degré relatif et forme normale

Système nono-variable (SISO)

$$\begin{aligned} \Sigma \quad \dot{x} &= f(x) + g(x)u & f: D \rightarrow \mathbb{R}^n, g: D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n \\ y &= h(x), & u, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.49)$$

f, g et h sont toutes suffisamment lisses. La dérivée de sortie est

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(f(x) + g(x)u) = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (6.50)$$

Dérivées consécutives de la sortie

$$\begin{aligned} \dot{y} &= L_f h(x) + L_g h(x)u \\ L_g h(x)u = 0 &\Rightarrow \dot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \\ &\vdots \\ L_g L_f^{k-1} h(x)u = 0 &\Rightarrow y^{(k+1)} = L_f^{k+1} h(x) + L_g L_f^k h(x)u \end{aligned}$$

Définition 6.4.6 : le système Σ a pour degré relatif ρ , $1 \leq \rho \leq n$ sur une région $D_0 \subset D$ si pour $\forall x \in D_0$

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, i = 1, 2, \dots, \rho - 1 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

Exemple 6.9 : *field-controlled DC motor*

$$f(x) = \begin{pmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + k - cx_1 x_3 \\ dx_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } h = x_3$$

$$L_g h(x) = 0$$

$$L_g L_f h(x) = dx_2$$

Le degré relatif est de 2 sur la région $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \neq 0\}$

Exemple 11: Degré relative d'un système linéaire

$$H(p) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{m-1} + \dots + a_0} \quad (6.52)$$

Une réalisation sous la forme canonique commandable

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Théorème 6.4.2 : le système Σ est linéarisable de telle sorte qu'il n'y ait pas de dynamique interne s'il a pour degré relatif $\rho = n$.

Démonstration : on pose,

$$(\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_n)^T = (\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$$

Alors

$$\dot{\xi}_i = L_f^{i-1} h(x) = \xi_{i+1}$$

$$\dot{\xi}_n = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u \quad (6.53)$$

Ce dernier devient une chaîne de n intégrateurs (aussi appelé la forme de **Brunovsky**)

$$\Sigma_l: \xi_1^{(n)} = v \quad (6.54)$$

à condition que

$$v = L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u \quad (6.55)$$

L'équivalence des systèmes Σ et Σ_l est liée à l'existence du bouclage ci-haut et un difféomorphisme dans un voisinage de x_0 $\xi = T(x)$:

$$T(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

En plus, comme $L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \forall x \in D_0$, on a pour commande linéarisante

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (v - L_f^n h(x)) = \beta(x) + \alpha(x)v \quad (6.57)$$

Remarque : la commande ci-haut est un bouclage statique

Application

On va chercher à déterminer :

Un bouclage

$$\vartheta = \alpha(x) + \beta(x)u$$

Un changement de coordonnées

$$z = \varphi(x)$$

Afin d'obtenir

$$\dot{z} = Az + B\vartheta$$

a) Présence d'une sortie**Système :**

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

Principe : dériver la sortie jusqu'à apparition de l'entrée.

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u)$$

Si

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = 0$$

on continue à dériver, c.-à-d. $\ddot{y} = \dots$, etc.

b) Chaîne d'intégrateurs

On finit par obtenir un certain r tel que :

$$y^{(r)} = \alpha(x) + \beta(x)u = \vartheta$$

C'est une chaîne d'intégrateurs.

c) Equation d'erreur et stabilisation

Chaîne d'intégrateurs

$$y^{(r)} = \vartheta$$

Polynôme caractéristique

$$A(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) = s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_{r-1} s + a_r$$

Equation d'erreur

$$e = y - y_c$$

$$A(s)E(s) = s^r E(s) + a_1 s^{r-1} E(s) + \dots + a_{r-1} s E(s) + a_r E(s) = 0$$

$$e^{(r)} + a_1 e^{(r-1)} + \dots + a_{r-1} e^{(1)} + a_r e = 0$$

d) Loi de commande pour la chaîne d'intégrateurs

$$\vartheta = y^{(r)} = y_c^{(r)} + a_1 (y_c^{(r-1)} - y^{(r-1)}) + \dots + a_{r-1} (y_c^{(1)} - y^{(1)}) + a_r (y_c - y)$$

Conditions sur la sortie

Sortie inconnue

Déterminer un $h(x)$ particulier tel qu'en posant $y = h(x)$ et en dérivant cette sortie, on arrive à une taille maximale $r = n$, c.-à-d.

$$y^{(r)} = \vartheta$$

Le bouclage transforme le système en une chaîne d'intégrateurs :

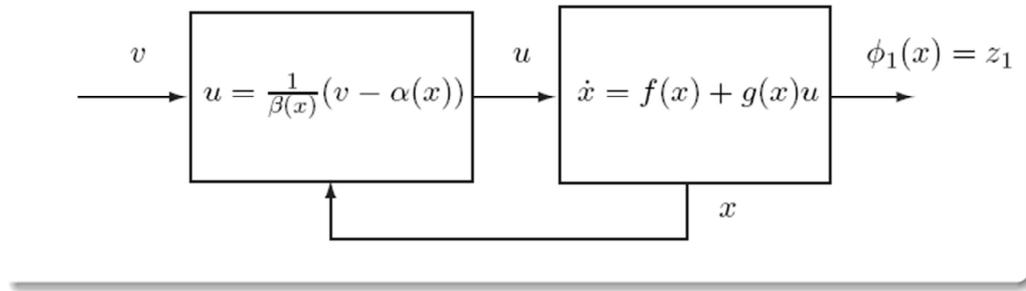


Figure 6.3 : Le bouclage entrée sortie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. KHALIL “**Nonlinear systems**” Prentice Hall, 3rd edition, 2002.
- [2] H. KHALIL “**Nonlinear control**”, Pearson Education, 2015.
- [3] J. J. SLOTINE “**Applied non linear control**” Prentice Hall, 1992.
- [4] S. SASTRY “**Nonlinear system analysis, stability and control**” Springer, 1999.
- [5] A. ISIDORI “**Nonlinear control systems**” Springer, 1995.
- [6] R. HUSSON, C. LUNG, J. F. AUBRY, J. DAAFOUZ ET D. WOLF “**Automatique (Du cahier des charges à la réalisation de systèmes, chapitres 4 et 10)**”, Dunod, 2007.
- [7] E. OSTERTAG “**Systèmes et asservissements continus : Modélisation, synthèse et lois de commande, chapitre 10**” Ellipses, 2005.
- [8] P. MÜLLHAUPT “**Introduction à l’analyse et à la commande des systèmes non linéaires**” Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.