TD_1 **AN3 2021**

Exercice 1. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn.*
Montrer que, $\forall x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Exercice 2. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *on définit trois applications de la manière suivante :*
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$||(x, y)||_1 = |x| + |y|$, $||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, *et* $||(x, y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

1. *Montrer que chacune des applications définit une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer que toutes ces normes sont équivalentes.*
3. *Montrer que toute boule pour* $||.||_1$ *contient une boule pour* $||.||_\infty$, *et vice versa.*

Exercice 3. *Soit* $C([a, b])$, *l'ensemble des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé. Pour toute fonction* $f \in C[a, b]$, *on pose* $||f|| = Sup_{[a,b]}|f(x)|$.
Montrer que $(C([a, b]), ||.||)$ *est un espace vectoriel normé.*

Exercice 4. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Montrer que :*

1. *Toute boule ouverte est un ouvert.*
2. *Toute boule fermé est un fermé.*
3. *L'intersection de deux boules ouvertes est un ouvert.*

Exercice 5. *Soit* (E, d) *un espace métrique. Pour tout* $x, y \in E$, *on pose* $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.
Montrer que d' *est une distance sur* E.
Indication : On peut utiliser la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1 + t}$ *pour* $t > 0$.

Exercice 6. *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que :*

1. *L'adhérence* $\overline{A}$ *de* A *est le plus petit fermé contenant* A.
2. *Montrer que l'intérieur de* A *est le plus grand ouvert contenu dans* A.
3. A *est fermé si, et seulement si, il contient la limite de chacune de ses suites convergentes.*

Exercice 7. *Soient* A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}^n$. *Montrer que*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;
3. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$;
4. $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice 8. *Soit* $A =]0, 1] \times [0, 1] \cup \{(0, 2)\}$ *un sous ensemble dans* $\mathbb{R}^2$.

1. A *est-il fermé ? (justifier)*
2. *Determiner le plus grand ouvert contenu dans* A ;
3. *Determiner un point* $x \in \mathbb{R}^2$, *s'il existe, tel que :*
   (a) x *n'est pas adhérent à* A ;
   (b) x *n'est pas un point d'accumulation pour* A,
   (c) x *est adhérent à* A *mais n'est pas un point intérieur à* A ;
   (d) x *n'est pas adhérent et n'est pas un point intérieur à* A.