République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ABDERAHMANE MIRA BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département d'Informatique

MODULE :

Analyse Mathématiques 4

L'objectif de cette UE est triple :
∗ Découvrir quelques concepts topologiques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
∗ Étendre les notions de limite continuité et différentiabilité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et les généraliser à des fonctions de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.
∗ Exploiter les résultats ci-dessus pour traiter certains problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes.
∗ Étendre la notion d'intégrale de Riemann aux cas d'un intervalle non borné ou d'une fonction non bornée.
∗ Définir l'intégrale de Riemann en dimensions 2 et 3. Introduire quelques notions sur les EDP.

Veuillez communiquer vos remarques et commentaires à l'adresse
< *talemdja@yahoo.com* >

Année universitaire 2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ELÉMENTS DE TOPOLOGIE

1.1 Introduction

Ce chapitre constitue une introduction à la topologie générale, une branche des mathématiques utilisée pour étudier la continuité, la différentiabilité, la convergence des suites, la compacité ...

1.2 Espace métrique

Définition 1.1. Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Séparation) ;
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Dans ce cas le couple (X, d) est appelé espace métrique.

Exemple 1.1. *1. Dans $\mathbb{R}$ l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) =\mid x - y \mid$ est une distance. En effet,*
Ainsi $(\mathbb{R}, \mid . \mid)$ est un espace métrique.

2.

Remarque 1.1. D'après la définition, la distance est toujours positive, c'est à dire si (X, d) est un espace métrique alors $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

Proposition 1.2. $\forall x, y, z \in X$, $\mid d(x, y) - d(x, z) \mid \leq d(y, z)$

Démonstration. voir TD □

1.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

1. (Séparation) pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;

2. (Homogénéité Positive) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
3. (Inégalité Triangulaire) pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé qu'on notera par la suite par *e.v.n.*

La proposition suivante montre que les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

Proposition 1.3. *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Alors l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E. On l'appelle DISTANCE INDUITE sur E par la NORME $\|.\|$.*

Démonstration. Soit $x, y, z \in E$.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0_E \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = | - 1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - Y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Remarque 1.2. Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n et d la distance induite par la norme de E. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, $d(0, x) = \|x\|$;
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$;
3. Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

Exemple 1.4.

1. *On peut voir facilement que la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, donc $(\mathbb{R}, |.|)$ est un e.v.n.*
2. *Désignons par $C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$, et pour toute fonction $f \in C[a, b]$, posons $\|f\| = sup_{[a,b]}|f(x)|$. Alors $(C[a, b], \|.\|)$ est un e.v.n et la norme ainsi définie est appelée norme de la convergence uniforme. En effet, Puisque f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, alors $sup_{[a,b]}|f(x)|$ existe et fini, donc $\|.\|$ est une application sur $C[a, b]$. Vérifions maintenant les conditions de la norme. $sup_{[a,b]}|f(x)| = 0$ si et seulement si $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$, c'est à dire f est une fonction nulle. d'où la séparation. Pour tout scalaire λ et pour toute fonction $f \in C[a, b]$, $\|\lambda f\| = sup_{[a,b]}|\lambda f(x)| = |\lambda| sup_{[a,b]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|$. Ceci implique l'homogénéité. Enfin pour $f, g \in C[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x|$, ceci implique $sup_{[a,b]}|f(x) + g(x)| \leq sup_{[a,b]}(|f(x)| + |g(x)|) = sup_{[a,b]}|f(x)| + sup_{[a,b]}|g(x)|$, c'est à dire $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. D'où l'inégalité triangulaire.*

Proposition 1.5. *Dans un e.v.n, $(E, \|.\|)$. On a :*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Voir TD □

Définition 1.3. Sur un même espace vectoriel E, plusieurs normes peuvent être définies. Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes s'il existe deux scalaires $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in E : \alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta\|x\|'$

Proposition 1.6. *Pour $x = (x_1, x_2 ... x_n)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, les trois applications $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définies par :*

1. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

2. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

3. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.3. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

1.4 Propriétés topologique des espaces vectoriels normés

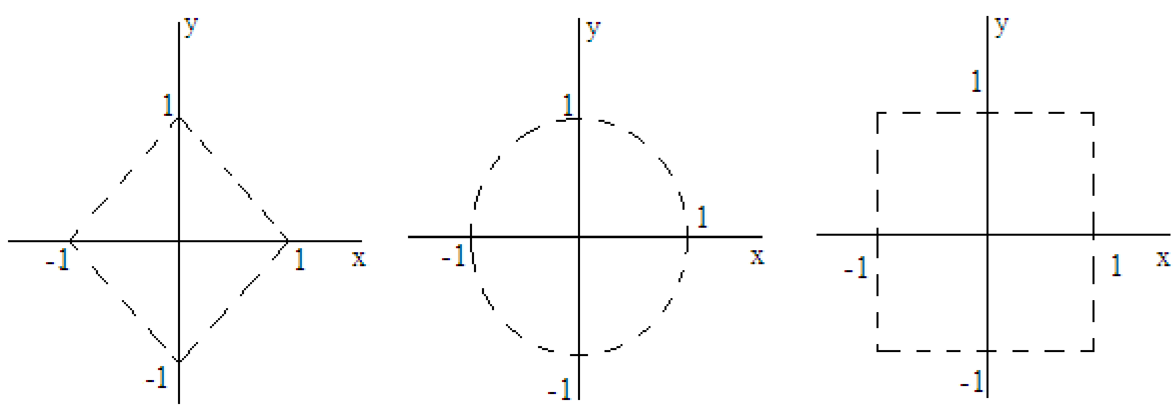
Pour rendre le cours plus simple, et puisque tout espace vectoriel normé est aussi un espace métrique, nous utiliserons les espaces vectoriels normés plutôt que les espaces métriques.

Définition 1.4. Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$ est appelée **boule ouverte** de centre a et de rayon r ;
2. $\overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$ est appelée **boule fermé** de centre a et de rayon r ;
3. $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$ est appelée **sphère** de centre a et de rayon r.

Dans l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$, $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$, *c'est à dire une boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est un intervalle ouvert centré en* a *et de longueur* $2r$. $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$. *Plus généralement, les boules ouvertes et les boules fermées dans* $\mathbb{R}$ *sont respectivement les intervalles ouverts et fermés :* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}\} = B(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$; $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}\} = \overline{B}(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$.

La figure ci-dessous donne une représentation géométrique d'une boule unité, une boule centrée en 0 et de rayon 1 pour chacune des normes $\|.\|_1, \|.\|_2 et \|.\|_\infty$ *définies respectivement sur l'espace* $\mathbb{R}^2$



La boule unité pour la norme $\|.\|_1$ | La boule unité pour la norme $\|.\|_2$ | La boule unité pour la norme $\|.\|_\infty$

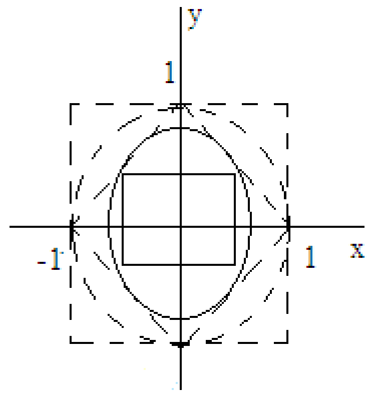


FIGURE 1.1

La figure 2.2 montre que dans $\mathbb{R}^n$, en particulier dans $\mathbb{R}^2$, il est toujours possible d'inclure une boule pour une norme donnée dans une boule pour une autre norme. Cette propriété caractérise les normes équivalentes. La notion de norme est utilisée pour étudier les notions de convergence, de continuité.... Ainsi, par exemple, si une suite converge (resp. si une fonction continue) pour une norme donnée, alors cette même suite (resp. fonction) converge (resp. continue) pour toute autre norme équivalente à la première. Par contre, si deux normes ne sont pas équivalentes, on peut avoir une fonction continue ou une suite convergente pour l'une des normes sans qu'elle le soit pour l'autre.

Définition 1.5.
1. On appelle **voisinage** d'un élément x tout ensemble noté V_x pour lequel il existe une boule ouverte $B(x, r)$ vérifiant $B \subseteq V_x$;
2. On dit qu'un ensemble O est un **ouvert** s'il est voisinage de chacun de ses éléments, c'est à dire $\forall x \in O, \exists r > 0$ tels que $B(x, r) \subseteq O$;
3. On dit qu'un ensemble F est un **fermé** si et seulement si son complémentaire F^c est un ouvert.
4. On dit qu'une partie $A \subset E$ est **bornée** si on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de A.

Exemple 1.7. $\star$ *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ muni de la norme $|.|$. Les intervalles ouverts $]a, b[$ sont des ouverts, et les intervalles fermés $[a, b]$ sont des fermés. Par contre, l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert ni fermé (pourquoi).*

Proposition 1.8. *Dans un e.v.n, les boules ouvertes sont des ouverts et les boules fermées sont des fermés.*

Démonstration. Voir TD. □

Propriétés. Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n. alors :
1. Toute union finie ou infinie d'ouverts de E est un ouvert ;
2. Toute intersection finie d'ouverts de E et un ouvert ;
3. Toute union finie de fermés de E est un fermé ;
4. Toute intersection finie ou infinie de fermés de E est un fermé ;

5. Les ensembles E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés ; si ce sont les seuls on dira que l'espace est **Connexe** ;
6. Les ensembles finis de points de E sont fermés .

Définition 1.6. Soit X un ensemble non vide. Une **topologie** sur X est une famille de parties de X notée T vérifiant :

1. $\emptyset, X \in T$;
2. T est stable par union quelconque, c'est à dire tout union d'élément de T est un élément de T ;
3. T est stable par intersection finie, c'est à dire toute intersection finie d'éléments de T est un élément de T.

Dans ce cas le couple (X, T) est appelé **espace topologique.**

D'après la propriété ci-dessus, on voit bien que l'ensemble des ouverts de l'espace $(E, \|.\|)$ constitue une topologie sur E qui s'appelle la topologie induite par la norme de E. Plus généralement tout espace métrique est un espace topologique. Notons que les éléments d'une topologie sont appelés "ouverts" même dans le cas où E n'est pas un e.v.n.

Définition 1.7. Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n et $A \subset E$.

1. On dit que x est un **point intérieur** à A si A est un voisinage de x, autrement dit, si A contient une boule ouverte contenant x. On note $Int(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des point intérieurs à A et on dit $Int(A)$ est l'intérieur de A.
2. Un point x de E est dit **adhérent** à A si toute boule ouverte contenant x contient au moins un élément de A, c'est à dire $\forall r > 0,\ A \cap B(x, r) \neq \emptyset$. On appelle **adhérence** de A et on la note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.
3. Un point x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage V de x contient un point de A différent de x. Autrement dit, $\forall r > 0, B(x, r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.
4. x est un **point isolé** de A si il existe une boule $B(x, r)$ telle que $B(x, r) \cap A = \{x\}$.
5. On appelle **frontière** de A, notée $Fr(A)$ l'ensemble défini par $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

Remarquons que si $x \in A$, alors x est un point adhérent à A.

Proposition 1.9. *1. $Int(A)$ est un ouvert et il est le plus grand ouvert contenu dans A.*

2. L'adhérence de A est un fermé et il est le plus petit fermé contenant A.

Démonstration. Voir TD. □

Définition 1.8. Dans un espace topologique (X, T), on appelle base toutes famille d'ouverts $B \subset T$ vérifiant : Pour tout ouvert $O \in T$, et pour tout $x \in O$, il existe $O' \in B$ tel que : $x \in O' \in O$.

Dans un evn, on a vue que O est un ouvert si et seulement si O est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire $\forall x \in O, \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$, donc l'ensemble des boules ouvertes dans un evn constitue une base d'ouverts.

Définition 1.9. Soit (X, T) un espace topologique et soit $A \subset X$. On appelle topologie induite par A la topologie T_A dont la famille d'ouverts est $T_A = \{O \cap A, O \in T\}$. On dit que (A, T_A) est un sous-espace topologique de (X, T). $O \cap A$ est appelé la trace de l'ouvert O sur A.

Si on prend $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle (la topologie définie par la valeur absolue) et $A = [0, 2[$. Alors $[0, 1[$ est un ouvert de A pour la topologie induite, car $[0, 1[=] - 1, 1[\cap A$ tandis qu'il n'est ni ouvert ni fermé comme partie de $\mathbb{R}$. De même $[1, 2[$ est un fermé de A pour la topologie induite car $[1, 2[= [1, 3] \cap A$.

Définition 1.10. On dit qu'un espace topologique (X, T) est séparé si pour tout couple de points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$, il existe Vx voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$. On dit aussi que la topologie T sépare les points de X.

Proposition 1.10. *Les evn sont des espaces séparés.*

1.5 Ensemble compact et suite convergente dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.11. On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{R}^n$ (ou **suite vectorielle**) toute application

$$\begin{cases} \mathbb{D} \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n; \\ x_p \longmapsto x_p = (x_p^1, x_p^2, \dots x_p^n). \end{cases}$$

On dit alors $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \dots x_{n,p})$ est le terme général de cette suite. On voit bien qu'une suite dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de n suites numériques.

Exemple 1.1. $x_p = (\frac{1}{p+1}, e^{-2p})$ est une suite dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.12. On dit qu'une suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ **converge** dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}^n$, tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geq N, \|x_p - l\| < \epsilon$. On écrit $\lim_{p \to +\infty} x_p = l$ et ce qui est équivalent à $\lim_{p \to +\infty} \|x_p - l\| = 0$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** Le symbole $\|.\|$ désigne l'une des normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

La suite $x_p = (\frac{1}{p+1}, e^{-2p})$ converge vers $(0, 0)$. En effet, en utilisant la norme $\|.\|_1$ par exemple, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \|x_p - (0, 0)\|_1 = \lim_{p \to +\infty} \|(\frac{1}{p+1} - 0, e^{-2p} - 0)\|_1 = \lim_{p \to +\infty} |\frac{1}{p+1}| + \lim_{p \to +\infty} |e^{-2p}| = 0$$

Proposition 1.11. *La limite d'une suite convergente est **unique***

Démonstration. On suppose que la suite $(x_p)_p$ admet deux limites l et l'. Alors on a

$$\|l - l'\| = \|l - x_p + x_p - l'\| \leq \|l - x_p\| + \|x_p - l'\| \tag{1.1}$$

En faisant tendre p vers l'infini, l'inégalité 2.1 implique $\|l - l'\| \leq 0$. Mais ceci, par définition d'une norme, implique $l - l' = 0$ et donc $l = l'$.

Proposition 1.12. *Dans $\mathbb{R}^n$, une suite vectorielle $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de terme général $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \dots x_{n,p})$ converge vers $l = (l_1, l_2 \dots l_n)$ si et seulement si pour $i = 1 \dots n$, la suite numérique $(x_{i,p})_p$ converge vers l_i.*

Démonstration. Donnons une preuve en utilisant la norme infinie. Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $x_p = (x_{1,p}, x_{2,p}, \dots x_{n,p})$ une suite convergente vers $(l_1, l_2 \dots l_n)$. Alors

$$\lim_{p \to +\infty} \|x_p - l\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \to +\infty} \max_i |x_{i,p} - l_i| = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \to +\infty} |x_{i,p} - l_i| = 0, \forall i$$

et ceci est équivalent à : $\lim_{p \to +\infty} x_{i,p} = l_i$ pour tout i.
Exercice : Reprendre la démonstration de la proposition ci-dessus en utilisant une autre norme de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.13. La suite $(x_p)_p$ est dite **bornée** si et seulement si l'ensemble $\{x_p; p \in \mathbb{N}\}$ est borné. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}, \|x_p\| \leq M$.

Proposition 1.13. *Toute suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est bornée.*

Remarque 1.4. Dans $\mathbb{R}^n$, une suite bornée peut ne pas converger (donner un exemple qui montre ça).

Définition 1.14. On dit qu'une suite $(x_p)_p$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une suite de **Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq N, q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \epsilon$$

.

Remarque 1.5. Là aussi, une suite vectorielle est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les n suites numériques sont de Cauchy.

Définition 1.15. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $(x_p)_p$ est une suite de points de A si pour tout $p \in \mathbb{N}, x_p \in A$. On dit que la suite $(x_p)_p$ converge dans A s'il existe $l \in A$ tel que $\lim_{p \Rightarrow +\infty} x_p = l$.

Proposition 1.14. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_p)_p$ une suite convergente vers l, alors pour $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq N \Rightarrow \|x_p - l\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Soient maintenant p, q deux entiers tels que $p \geq N, q \geq N$, alors, $\|x_p - x_q\| = \|x_p - l + l - x_q\| \leq \|x_p - l\| + \|x_q - l\| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. D'où $(x_p)_p$ est une suite de Cauchy.

Remarque 1.6. D'après cette proposition, si $(x_p)_p$ est une suite d'éléments de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ qui converge dans A, elle est aussi de Cauchy. Cependant, on peut trouver une suite dans A de Cauchy et qui ne converge pas dans A. En effet, soit par exemple la suite $x_p = (\frac{1}{p}, \frac{p}{p+1})$. Il est claire que cette suite converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $(0, 1)$, donc elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ (proposition 1.14). Remarquons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_p \in A =]0, 1] \times [1, 2]$. Puisque x_p est une suite de Cauchy sur $\mathbb{R}^2$, elle l'est aussi sur A. Mais le point $(0, 1)$, la limite de la suite en question, n'appartient pas à A.

Définition 1.16. On dit qu'un ensemble A (ou un EVN en général) est **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de A est convergente dans A. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de **Banach**.
Ainsi, l'ensemble $A =]0, 1] \times [1, 2]$ n'est pas complet. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach (ça se démontre mais on va pas le faire ici !).

Définition 1.17. Dans $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un ensemble A est **Compact** s'il est fermé et borné.
L'ensemble $A =]0, 1] \times [1, 2]$ n'est pas compact, car il n'est pas fermé. Par contre $\overline{A} = [0, 1] \times [1, 2]$ est un compact (car le produit cartésien de deux intervalles fermés et bornés donne un ensemble fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$).

Proposition 1.15. *Dans $\mathbb{R}^n$, les compacts sont des ensembles complets.*

CHAPITRE 2

FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

2.1 Introduction

Les fonctions à une seule variable que nous avons étudié jusqu'ici modélisent des phénomènes qui dépendent d'un seule paramètre, c'est à dire l'espace qui contient cette variable est un espace de dimension un (l'espace $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Cependant, pour traiter des questions relatives à la chimie, la physique, la biologie, l'économie, la consommation ou la production etc, les fonctions d'une seule variable ne suffisent pas, car une modélisation adéquate dépend de plusieurs paramètres (ou plusieurs variables) d'où la nécessite d'introduire les fonctions de plusieurs variables, c'est à dire la variable est un vecteur composé de n variables numériques et donc l'espace qui contient ce vecteur est un espace de dimension n ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$).

Dans l'étude des fonctions d'une seule variable, nous avons parlé de nombreuses notions : le domaine de définition, la représentation graphique (graphe), les limites, ; la continuité, les développements limites etc. Dans ce chapitre, nous allons reprendre l'étude de toutes ces notions et voir comment elles changent quand on passe aux fonctions de plusieurs variables.

Dans ce chapitre et pour faciliter la compréhension, nous allons considérer dans la plus part des cas des fonctions qui dépendent de deux, éventuellement de trois variables. La généralisation au cas très générale se fait d'une manière naturelle.

2.2 Généralités

Définition 2.1. Une correspondance $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui, à tout élément $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$, associe <u>au plus</u> un élément dans $\mathbb{R}^m$ noté $f(x)$ et appelé **fonction** sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$; le point $f(x)$ est appelé **image** de x par la fonction f. Si $n > 1$ et $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction **numérique** de plusieurs variables ou de n variables. Si $n > 1$ et $m > 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est appelée fonction **vectorielle** de n variables. Si tout élément $x \in \mathbb{R}^n$ possède une <u>unique</u> image $f(x)$, la fonction f dans ce cas est appelée **application** sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1. Dans le cas où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x))$ qui est un vecteur à m composantes, où la fonction numérique $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $j = 1 \dots m$ est appelée fonction **composante** (ou fonction **Coordonnée**) de f.

Définition 2.2.

1. On appelle **domaine de définition** de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1$, l'ensemble $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ des éléments ayant une image par f dans $\mathbb{R}^m$. Si x a une image par f, on dit f est définie au point x. Notons que la restriction de la fonction f sur son domaine de définition D_f est une application.
2. On appelle image de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, l'ensemble

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R}^m / \exists x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\}$$

.

Remarque 2.2. Dire que la fonction f est définie en un point x signifie que le point x admet une image par f, c'est à dire $f(x)$ existe. Ainsi, si f est une fonction vectorielle, $f = (f_1, f_2 \dots f_m)$, alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ existe si et seulement si $f_j(x)$ existe pour tout j, donc f est définie si et seulement si toutes les fonctions coordonnées de f sont définies. Autrement dit $D_f = \cap_{j=1}^n D_{f_j}$.

Exemple 2.1.

1. $$f(x, y) = \ln(xy)$$

   f est une fonction numérique de deux variables ; la fonction f est définie si et seulement si $xy > 0$, donc

   $$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ et } y < 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*.$$

   Le domaine de définition de f est la partie grisée sur la figure 2.1 (a) privée des deux axes $x = 0$ et $y = 0$.

2. $$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

   f est une fonction numérique de trois variables ; la fonction f est définie si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$. Puisque $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$, alors f est définie sur $\mathbb{R}^3$ tout entier, c'est à dire

   $$D_f = \mathbb{R}^3$$

   Ainsi, f est une application sur $\mathbb{R}^3$.

3. $$f(x, y) = (\ln(xy), \frac{x + y}{\sqrt{xy^2}})$$

   f est une fonction vectorielle de deux variables. Les fonctions coordonnées de f sont :

   $$f_1(x, y) = \ln(xy) \text{ et } f_2(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{xy^2}}$$

   $D_{f_1} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*$;
   $D_{f_2} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$. D'où

   $$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*) \cap (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

   Le domaine de définition de f est la partie grisée sur la figure 2.1 (b) privée des deux axes $x = 0$ et $y = 0$.

Définition 2.3. Soit f une fonction numérique de deux variables.

1. On appelle graphe de f, ou surface représentative de f, l'ensemble $G(f)$ des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ où $(x, y) \in D_f$ et $z = f(x, y)$, c'est à dire

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D_f\}.$$

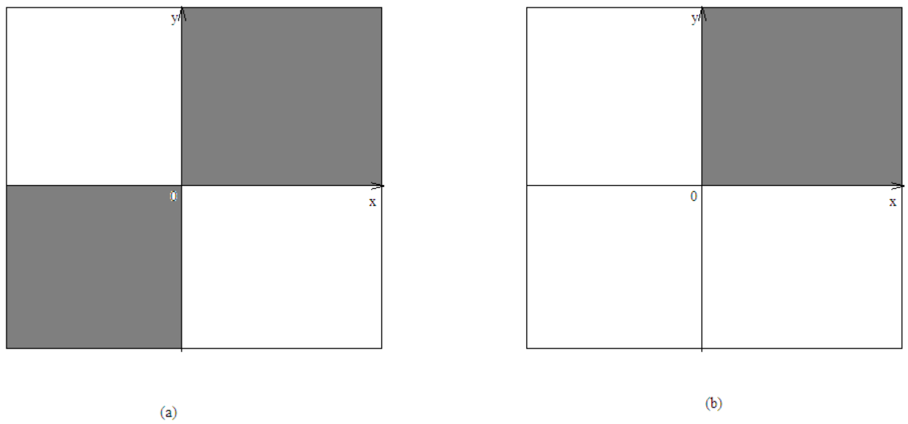


FIGURE 2.1

2. Pour toute constante $k \in Im_f$, l'ensemble

$$C_k = \{x \in D_f / f(x) = k\}$$

est appelée la **courbe de niveau** k

Définition 2.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Pour $i = 1 \dots n$, la fonction p_i définie par $p_i : \mathbb{R}^n \to R$ telle que pour $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p_i((x_1, x_2 \dots x_n)) = x_i$ est appelée la $i-i\grave{e}me$ **projection** de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Ainsi f possède n projections sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.3. Il est facile de voire que dans le cas où $f = (f_1, f_2 \dots f_m)$, on a $f_j(x) = p_j \circ f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1 \dots m$. En effet, pour la fonction

$$f(x, y) = (\ln(xy), \frac{x+y}{\sqrt{xy^2}}) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

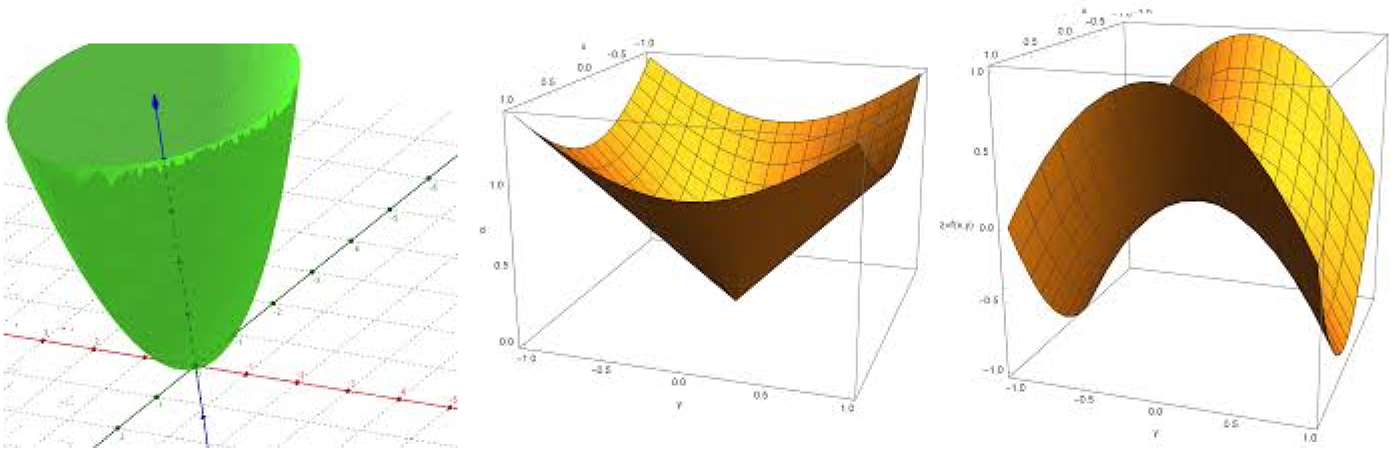
on a, par exemple

$$p_1 \circ f(x, y) = p_1(f(x, y)) = p_1(\ln(xy), \frac{x+y}{\sqrt{xy^2}}) = \ln(xy) = f_1(x, y).$$

De même

$$p_2 \circ f(x, y) = p_2(f(x, y)) = p_2(\ln(xy), \frac{x+y}{\sqrt{xy^2}}) = \frac{x+y}{\sqrt{xy^2}} = f_2(x, y).$$

Exemple 2.2.
1. La figure 2.2 (a) montre une portion du graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ ("**paraboloïde à une nappe**").
2. La figure 2.2 (b) montre une portion du graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ a la forme d'une selle de cheval appelé **paraboloïde hyperbolique** voir figure 2.2 (c).



(a) $f(x,y)= x^2 + y^2$

(b) $f(x,y)= \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x,y)= x^2 - y^2$

Figure 2.2

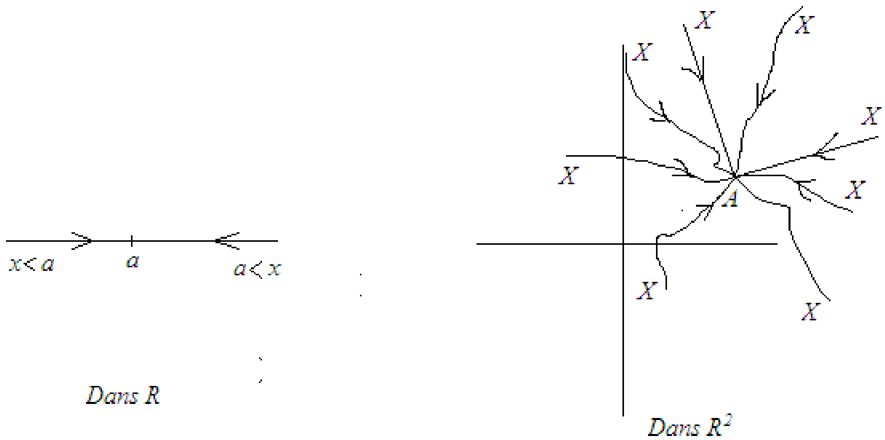


FIGURE 2.3

2.3 Limite et Continuité

2.3.1 Limites

La notion de limite pour les fonctions de plusieurs variables généralise naturellement la notion de limite étudiée pour les fonctions d'une seule variable. La différence principale entre les deux notions est la suivante : dans $\mathbb{R}$ pour calculer une limite en un point a, le nombre de chemins à considérer est deux, le chemin définie par les valeurs de x qui sont inférieurs à a et celui des x qui sont supérieurs à a, par contre dans $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, pour approcher un point A, il y à une infinité de chemins possibles (voir figure 2.3). Bien sûre, l'existence de la limite en un point donnée doit être indépendante du chemin considéré.

Définition 2.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sauf peut être en x_0.

1. Pour $m = 1$, on dit que le scalaire $l \in \mathbb{R}$ est la **limite** de la fonction f au point x_0 (ou "quand x tend vers x_0") si pour tout $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.
2. Pour $m > 1$, on dit que le vecteur $l \in \mathbb{R}^m$ est la limite de la fonction f au point x_0 (ou "quand x tend vers x_0") si pour tout $\epsilon > 0, \exists \alpha > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \epsilon$.

On ecrit alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{2.1}$$

Remarque 2.4.
1. La norme utilisée dans la définition représente l'une des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, car on a vu que celles ci sont équivalentes et donc si la limite existe en utilisant l'une de ces normes, elle existe aussi en la remplaçant par une autre quelconque.
2. Dans le cas d'une fonction vectorielle $f = (f_1, f_2 \ldots f_m)$, le vecteur $l = (l_1, l_2 \ldots l_m)$ est la limite de f au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour $j = \overline{1, m}$, le scalaire l_j est la limite de f_j au point x_0 (on peut le démontrer facilement).

Le théorème suivant connu sous le nom du **Théorème des GENDARMES** donne une technique pour calculer une limite d'une fonction numérique en un point donné.

Théorème 2.1. *Soient f, g et h trois fonctions numériques sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$.
2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ dès que $\|x - x_0\| < \alpha$.*

Alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Exemple 2.3. On veut calculer la limite de la fonction de deux variables $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ au point $(0, 0)$.
On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$-y \leq f(x, y) \leq y$$

Puisque

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} -y = \lim_{(x,y) \to (0,0)} y = 0$$

alors, d'après le théorème des Gendarmes, on a aussi

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Remarquons que la fonction f n'est pas définie au point $(0, 0)$, ainsi cet example confirme ce qui est dit dans la définition de la limite : une fonction f peut admettre une limite en un point même si celui ci n'appartient pas au domaine de définition de f.

Proposition 2.2. *Si la fonction f admet une limite en un point a, alors celle ci est **unique**.*

Démonstration. Exercice

D'après cette proposition, l'existence de la limite au point x_0 doit être indépendant du chemin emprunté par x vers x_0. Là aussi une idée vient à l'esprit : pour montrer qu'une fonction f n'admet pas une limite au point x_0, on peut choisir deux chemins différents qui mènent vers le point x_0 et qui donnent deux valeurs différentes pour la limite.

Exemple 2.4. Calculons

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}?$$

Sur le chemin définie par la droite d'équation $x = y$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Sur le chemin définie par la droite d'équation $x = 2y$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \to 0} f(2y, y) = \lim_{y \to 0} \frac{2y^2}{5y^2} = \frac{2}{5} \tag{2.3}$$

Puisque $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{5}$, alors f n'admet pas de limite au point $(0, 0)$.

Pour calculer la limite d'une fonction numérique de deux variables en un point $A = (x_0, y_0)$, on peut utiliser la notion de coordonnées polaires. En effet, un point A quelconque dans le plan est caractérisé par ses coordonnées cartésiennes qui sont x et y. Ce même point est aussi caractérisé par ses coordonnées polaires $r \in \mathbb{R}_+$ qui est la distance du point A par rapport à

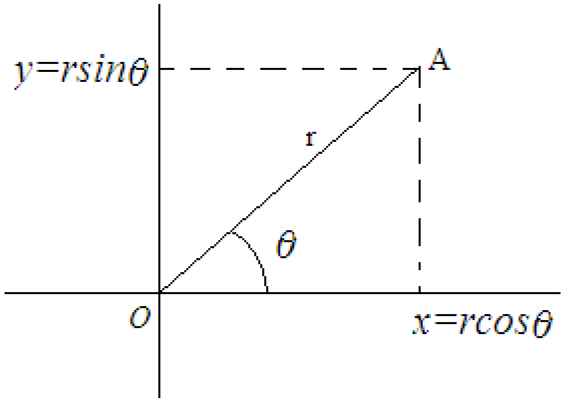


FIGURE 2.4

l'origine O et $\theta \in [0, 2\pi[$ qui est l'angle formée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ avec l'axe OX. Ces deux types de coordonnée sont liées par les équations suivantes (voir la figure 2.4)

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta \text{ et on a}$$

$$(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow r \to 0$$

Il en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Pour calculer la limite en un point (x_0, y_0) en utilisant les coordonnées polaires, on effectue le changement de variable suivant

$$x = r\cos\theta + x_0 \text{ et } y = r\sin\theta + y_0$$

Ainsi

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow r \to 0$$

Il en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta + x_0, r\sin\theta + y_0)$$

Par exemple, pour $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \cos\theta\sin\theta$$

Cette limite n'est pas unique car elle dépend des valeurs de θ, par conséquent la fonction f n'admet pas de limite à l'origine.

Définition 2.6. On dit que la fonction numérique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers x_0 si $\forall A > 0, \exists\alpha > 0$ tel que $\|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$ (resp. $f(x) < -A$).

Proposition 2.3. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet une limite l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers x_0, la suite $(f(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Proposition 2.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$. Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}, \lim_{y\to b} f(x,y)$ existe et que pour tout $y \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} f(x,y)$ existe. Alors*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = l.$$

La proposition 2.4 donne une condition nécessaire pour l'existence de la limite en un point donné qu'on utilise généralement pour démontrer qu'une limite n'existe pas en ce point. Notons cette condition n'est pas suffisante. En effet, on vient de voir que la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas une limite à l'origine même si

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$

2.3.2 Continuité

2.4 Fonctions différentiables

2.4.1 Dérivées partielles

Dans toute la suite U désigne un ouvert dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.7. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert et soit $a \in U$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point $a = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, a_2 \ldots, a_i + h, \ldots a_n) - f(a_1, a_2 \ldots a_n)}{h}$$

existe et finie ; on note cette dérivée partielle par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$.

Exemple 2.5. Les dérivées partielles de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ au point $a = (1,3)$ sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,3) - f(1,3)}{h} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,3+h) - f(1,3)}{h} = 6$$

Définition 2.8. On appelle dérivée partielle de l'application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par rapport à la variable x_i, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Il est à noter que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie au point $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ si est seulement si les n dérivées partielles de l'application f existent au point x ; dans ce cas, l'image de x par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, c'est à dire $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est obtenue en dérivant l'application f par rapport à la variable x_i et en traitant les autres variables comme des constantes.

Exemple 2.6. 1. Soit la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$. Sont domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$ qui est un ouvert. et ses dérivées partielle sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} : D_f \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-1}{(x-y)^2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} : D_f \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases}$$

2.

Définition 2.9. On dit qu'une application vectorielle $f : U \to \mathbb{R}^m$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i en un point $a \in U$ si pour $j = \overline{1, m}$, l'application coordonnée f_j admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a.

Définition 2.10. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application admettant des dérivées partielles au point $a \in U$.

1. Si $m = 1$, on appelle gradient de f au point a le vecteur noté $\overrightarrow{grad} f(a)$ ou $\bigtriangledown f(a)$ définie par $\bigtriangledown f(a) = (\dfrac{\partial f}{x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{x_n}(a))$.
2. Si $m > 1$, on appelle matrice Jacobienne de $f = (f_1, f_2 \ldots f_m)$ la matrice notée $Jacf(a)$ définie par :

$$Jacf(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

2.4.2 Fonction différentiable

Définition 2.11.

1. On dit qu'une application réelle $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, s'il existe une forme linéaire, notée $Df(a)$ définie par :

$$\begin{cases} Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ h = (h_1, h_2 \ldots h_n) \longmapsto Df(a)h = \sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \end{cases}$$

telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)h}{\|h\|} = 0 \tag{2.4}$$

2. On dit qu'une application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable au point $a \in U$, s'il existe une application linéaire, notée $Df(a)$ définie par :

$$\begin{cases} Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ h = (h_1, h_2 \ldots h_n) \longmapsto Df(a)h = Jacf(a)h = (\sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) h_i, \ldots, \sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) h_i)^t \end{cases}$$

telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)h}{\|h\|} = 0_{\mathbb{R}^m} \tag{2.5}$$

Proposition 2.5. *Si l'application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1$ est différentiable en tout point de U, on dit qu'elle est différentiable sur U.*

Proposition 2.6. *Une fonction vectorielle $f = (f_1, f_2 \dots f_m)$ est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si pour $j = \overline{1, m}$, la fonction composante f_j est différentiable au point a.*

Exemple 2.7. La fonction $f(x, y) = (x \cos y, e^{xy})$ est différentiable au point $(0, 0)$, car les fonctions coordonnées $f_1(x, y) = x \cos y$ et $f_2(x, y) = e^{xy}$ sont différentiables en ce même point. En effet :

— Pour f_1
Les dérivées partielles de f_1 sont
$f'_x(x, y) = \cos y \Rightarrow f'_x(0, 0) = \cos 0 = 1$
$f'_y(x, y) = x \sin y \Rightarrow f'_y(0, 0) = 0$ et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - (1 \times h_1 + 0 \times h_2)}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 \cos h_2 - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \tag{2.6}$$

On pose $h_1 = r \cos\theta$ et $h_2 = r \sin\theta$ on aura

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 \cos h_2 - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{r\to0} \cos\theta \cos(r \sin\theta) - \cos\theta = 0 \tag{2.7}$$

Ceci implique que f_1 est différentiable au point $(0, 0)$.

— Pour f_2
Les dérivées partielles de f_1 sont
$f'_x(x, y) = ye^{xy} \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0$
$f'_y(x, y) = xe^{xy} \Rightarrow f'_y(0, 0) = 0$ et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - (0 \times h_1 + 0 \times h_2)}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{e^{h_1h_2} - 1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \tag{2.8}$$

On pose $h_1 = r \cos\theta$ et $h_2 = r \sin\theta$ on aura

$$\lim_{r\to0} \frac{e^{r^2 \cos\theta \sin\theta} - 1}{r} = \lim_{r\to0} 2r \cos\theta \sin\theta e^{r^2 \cos\theta \sin\theta} = 0(\text{ th. de l'Hopital}) \tag{2.9}$$

Ceci implique que f_2 est différentiable au point $(0, 0)$

Définition 2.12. On dit que l'application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1$ est de classe C^1 sur U et on écrit $f \in C^1(U)$ si les dérivées partielles de f sont continues sur U.

Remarque 2.5. Il est claire que l'application $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout j l'application $f_j \in C^1(U)$.

Proposition 2.7. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application réelle et soit $a \in U$*

1. *Si pour $i = \overline{1, n}$ la dérivée partiel $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue au point a, alors f est différentiable au point a.*
2. *Si $f \in C^1(U)$, alors f est différentiable sur U.*

Exemple 2.8. La fonction $f(x, y) = xy^2, x \cos y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car ses composantes $f_1(x, y) = xy^2$ et $f_2(x, y) = x \cos y$ sont dans $C^1(\mathbb{R}^2)$. En effet :

— Les dérivées partielles de f_1 sont $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y^2$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2xy$ et elles sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

— De même, les dérivées partielles de f_2 sont $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \cos y$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x \sin y$ et elles sont aussi continues sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent $f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Proposition 2.8. *(Opérations algébrique sur les fonctions différentiables)*
Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1$ deux applications différentiable au point $a \in U$. Alors :

1. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'application $\alpha f + \beta g$ est différentiable au point a.*
2. *pour $m = 1$, les applications fg et $\dfrac{f}{g}$ pour $g \neq 0$ sont aussi différentiables au point a.*

Théorème 2.9. *(Composition des applications différentiables)*
Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $f : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux applications telles que f est différentiable au point $a \in U$ et g est différentiable au point $b = f(a) \in V$. Alors

1. *l'application $h = g \circ f$ est différentiable au point a ;*
2. *$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$*

Remarque 2.6. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si $f(U) \subseteq V$, et si f, g sont de classe C^1 sur $U, f(U)$ respectivement, alors $g \circ f$ est de classe C^1 sur U.
Exercice. Soient f, g deux fonctions définies par

$$f(x,y) = (x^2 + y, xy^2) \text{ et } g(x,y) = x + y \tag{2.10}$$

1. Montrer par deux méthodes que $h = g \circ f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $D(g \circ f)(1,2)$ par deux méthodes.

Solution.

1. — Méth.1 Les composantes de f sont des polynômes donc elles sont dans $C^1(\mathbb{R}^2$ et donc f est aussi dans $C^1(\mathbb{R}^2$. On a aussi $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, car c'est un polynôme. Et d'après le théorème ci-dessus la composition de g et f est aussi dans $C^1(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire $g \circ f \in C^1(\mathbb{R}^2)$
   — Méth.2 Par définition on a $h(x,y) = g \circ f(x,y) = g(x^2 + y, xy^2) = x^2 + xy^2 + y$. On voit bien que la fonction h est un polynôme donc elle est dans $C^1(\mathbb{R}^2)$.

2. (a) Meth.1 On a $g \circ f(x,y) = x^2 + xy^2 + y$, ses dérivées partielles sont : $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(1,2) = 6$ et $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x,y) = 2xy + 1 \Rightarrow \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(1,2) = 5$. Par conséquent la forme linéaire $D(gof)$ est définie par :

$$D(g \circ f)(x,y) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(1,2).x + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(1,2).y = 6x + 5y \tag{2.11}$$

2.4.3 Dérivées directionnelles

La notion de dérivée directionnelle dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ permet de quantifier, en un point donné, la variation d'une fonction à plusieurs variables le long d'une direction donnée dans cet espace. Elle généralise la notion de dérivées partielles, dans le sens où l'on retrouve ces dernières en prenant comme directions de dérivation celles des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une application réelle, a un point dans U qui est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et v un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^n$.

Posons $D = \{t \in \mathbb{R}, a + tv \in U\}$ et soit $\phi : D \to \mathbb{R}$ une application réelle définie par $\phi(t) = f(a + tv)$. Remarquons que le domaine D est un ouvert contenant le point $t = 0$. En effet, l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que $g(t) = a + tv$ est linéaire continue, et puisque U est ouvert donc son image réciproque par g est aussi un ouvert, c'est à dire D est ouvert.

Définition 2.13. On dit que f admet une dérivée suivant le vecteur v si l'application ϕ est dérivable au point 0, c'est à dire la limite

$$\phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

existe. Ainsi, $\phi'(0)$ s'appelle alors le dérivée de f suivant le vecteur v et on l'a note par $d_v f(a)$.

Remarque 2.7. Remarquons que si v est un vecteur de la base de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $v = e_i, i = \overline{1, n}$, alors la dérivée suivant le vecteur v est

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2 \ldots, a_i + t, \ldots a_n) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \tag{2.12}$$

Ainsi, la dérivée au point a suivant le vecteur e_i est exactement la i-ieme drivée partiel de f au point a.

Proposition 2.10. *$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si f est différentiable au point a, alors elle admet des dérivées suivant n'importe quel vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$ et on a*

$$Df(a)(v) = d_v f(a)$$

Démonstration. Par définition f est différentiable au point a implique que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) - Df(a)(h) = o(\|h\|) \tag{2.13}$$

Pour $h = tv$, l'équation 2.10 est équivalente à

$$f(a + tv) - f(a) - Df(a)(tv) = o(|t|\|v\|) = o(|t|) \tag{2.14}$$

puisque l'application $Df(a)$ est linéaire, alors l'équation 2.14 implique

$$f(a + tv) - f(a) - tDf(a)(v) = o(|t|) \Rightarrow \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = Df(a)(v) + \frac{o(|t|)}{t} \tag{2.15}$$

D'où

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = Df(a)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{o(|t|)}{t} = Df(a)(v)$$

c'est à dire

$$df_v(a) = Df(a)(v) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i$$

Remarque 2.8. La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas vraie. En effet, considérons l'application suivante

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si non} \end{cases} \tag{2.16}$$

Pour $a = (0, 0)$ et pour tout vecteur non nul $v = (v_1, v_2)$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} = df_v(0, 0) \tag{2.17}$$

Donc l'application f admet à l'origine une dérivée suivant tout vecteur non nul v. Montrons que f n'est pas différentiable au point $(0,0)$. Un calcul très simple donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \tag{2.18}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos\theta \sin^2\theta}{r^3} = \cos\theta \sin^2\theta \tag{2.19}$$

La limite n'est pas unique donc elle n'existe pas et donc f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Remarque 2.9. 1. Si on remplace le vecteur v par un vecteur colinéaire αv, le calcul de dérivée est identique à la multiplication par le facteur α :

$$d_{\alpha v} f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\alpha v) - f(a)}{t} = \lim_{s\to 0} \frac{f(a+sv) - f(a)}{d\frac{s}{\alpha}} = \lim_{s\to 0} \alpha \frac{f(a+sv) - f(a)}{s} = \alpha d_v f(a)$$

où $s = \alpha t$. Ceci veut dire que si f est dérivable en a suivant le vecteur non nul v, f est aussi dérivable en a suivant αv pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Il n'y a pas de raison d'observer un résultat particulier lorsqu'on somme deux vecteurs v et v'. Cependant, si f est différentiable, on a d'après la proposition 2.10

$$d_{v+v'} f(a) = Df(a)(v+v') = df(a)(v) + df(a)(v') = d_v f(a) + d_{v'} f(a)$$

2.4.4 Travaux Dirigés

Exercice 1. 1. Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction f :

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$ 2. $f(x,y) = ln(x+y)$ 3. $f(x,y) = ln(x^2 - y)$

2. Calculer la limite si elle existe ou montrer qu'elle n'existe pas :

a) $lim_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{x^2+y^2}{(x-1)(y+2)}$ b) $lim_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{y}{x-2}$

Exercice 2. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \dfrac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrer que $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$ en utilisant :

1. la définition (avec la norme euclidienne) ;
2. le théorème des Gendarmes,
3. les coordonnées polaires.

Exercice 3. Donner l'expression des dérivées partielles des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs domaines de définition

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
2. $g(x,y) = \log \dfrac{x+y}{x-y}$

3. $h(x,y) = y\sin x + \cos(x+y)$

4. $k(x,y) = xye^{x+2y}$

5. $l(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Exercice 4. Soit la fonction F définie par :

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de F ;
2. La fonction F est-elle continue sur son domaine ?

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$;
2. Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$ de deux manières différentes.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$;
2. Etudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$ de deux manières différentes.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. Soit f la fonction vectorielle définie par $f(x,y) = (y\sin\dfrac{1}{x}, \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$ en donnant son prolongement $\widehat{f}$.
3. Etudier la différentiabilité de $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit g la fonction définie par $g(x,y) = (x+y, xy)$.
   (a) Donner le domaine de définition de $g \circ \widehat{f}$.
   (b) Montrer que $g \circ \widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Etudier la différentiabilité de $g \circ \widehat{f}$.
   (d) Calculer par deux méthodes la différentielle de $g \circ \widehat{f}$ au point $(1,0)$.

2.5 références

1. Kada ALLAB, Élément d'analyse, O.P.U 2^e édition (2009).
2. J. Lelong Ferrand, Exercices résolus d'analyse, Dunod, 1977.
3. J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, 1978.
4. J. Rivaud, Analyse « Séries, équations différentielles » -Exercices avec solutions, Vuibert, 1981.
5. C. Servien, Analyse 3 « Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales », Ellipses, 1995.