Université A/ MIRA de Béjaia | Année universitaire 2020-2021
Faculté de Technologie | MATHS 1 Décembre 2020
Département de Technologie 1ère année

Série de T.D. N 1 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n° 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

$$(a)\ [(-3)^2 = 9] \wedge (\sqrt{9} = -3) \quad ; \quad (b)\ (|-8| = -8) \vee (\sqrt{36} = 6)\ ;$$
$$(c)\ \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -9 \quad ; \quad (d)\ \exists\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+3) < 0\ ;$$
$$(e)\ \forall x \in [3, +\infty[, \quad x^2 \geq 9 \quad ; \quad (f)\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) \neq 0\ ;$$
$$(g)\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y \quad ; \quad (h)\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < y.$$

Exercice n° 2. Soient $P,\ Q$ et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrer que
$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$
2. Donner les négations des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow Q$,
   (b) $P \vee (Q \wedge R)$.
3. Considérons la proposition
$$S : \text{"}\forall n \in \mathbb{N},\ (n^2 \neq n) \Rightarrow (n \geq 2).\text{"}$$
   (a) Donner la négation de la proposition S.
   (b) Montrer que la proposition S est vraie.

Exercice n° 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par contraposition que
$$[(n^2-1) \text{ n'est pas divisible par } 8] \Rightarrow [n \text{ est pair}].$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposition que
$$(xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)$$
   et
$$[(x \neq 11) \wedge (y \neq -10)] \Rightarrow (xy + 10x - 11y - 10 \neq 100).$$
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par l'absurde que
$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$
4. Montrer par l'absurde que la proposition
$$\mathcal{P} :\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \ \ \sqrt{9+x^5} \neq 3 + \frac{x^5}{6}$$
   est vraie.
5. Soient $a, b \geq 0$. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que
$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$$

Exercice n° 4. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1;$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$, où x est un réel positif.