**Corrigé DE L'Exercice1.** Calcul des limites :

■$\lim u_n = \lim(3n^2 - n^3) = \lim(-n^3) = -\infty.$

■$\lim u_n = \lim \frac{-3n^3+n}{n^2+n-2n^3} = \lim \frac{-3n^3}{-2n^3} = \frac{3}{2}.$

■$\lim u_n = \lim \left(\frac{-n+5}{n^2-1}\right) = \lim \frac{-n}{n^2} = \lim \frac{-1}{n} = 0.$

■ $\lim u_n = \lim \frac{3n^4-n^2-1}{-n^2-1} = \lim \frac{3n^4}{-n^2} = \lim(-3n^2) = -\infty.$

■$\lim u_n = \lim(-3)^n$. N'existe pas.

■$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \left(\frac{4}{3}\right)^n\right) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \lim \left(-\frac{4}{3}\right)^n = 0 - \infty = -\infty.$

■$\lim u_n = \lim \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim \left(\frac{3}{5}\frac{3}{2}\right)^n = \lim \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$

**Corrigé DE L'Exercice2.** On a la suite $(u_n)$ telle que : $u_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Le Calcul des termes.

$\boldsymbol{u_1} = \sqrt{2 + \boldsymbol{u_0}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \boldsymbol{u_2} = \sqrt{2 + \boldsymbol{u_1}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \boldsymbol{u_3} = \sqrt{2 + \boldsymbol{u_2}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 2.$

Par récurrence, on a $u_0 = \sqrt{2}$, donc $0 < u_0 < 2$. De plus pour $0 < u_n < 2$, nous donne :

$0 < u_n + 2 < 4$ et cette dernière inégalité nous donne $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$.

Ceci signifie $0 < u_{n+1} < 2$. D'où le résultat.

3. La vérification.

On a $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, donc $u_{n+1}^2 = 2 + u_n$ et $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2$.

Or $2 + u_n - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n)$. Ce qui nous donne $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n)$.

4. Déduction que la suite $(u_n)$ est croissante.

On peut remarquer $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)}{u_{n+1}+u_n} = \frac{u_{n+1}^2-u_n^2}{u_{n+1}+u_n}$. Mais $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (2 - u_n)(1 + u_n)$,

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_{n+1}+u_n}$. Puisque $0 < u_n < 2$, on a $2 - u_n > 0$, $1 + u_n > 0$ et $u_{n+1} + u_n > 0$.

Ce qui nous donne $u_{n+1} - u_n > 0$. D'où la suite est croissante.

**5.** La convergence.

La suite $(u_n)$ est convergente car elle est croissante et majorée ($u_n < 2$).

Donc $\lim u_n = l$. Et $0 \leq l \leq 2$.

**6.** La Limite.

Comme $l = \lim\, u_n$, $l$ vérifie l'équation $l^2 - l^2 = (2-l)(1+l)$ ou bien $(2-l)(1+l) = 0$. Ce qui nous donne $l = 2$ ou $l = -1$. Donc $l = 2$.

**Corrigé DE L'Exercice3.** On a la suite $(u_n)$ telle que $u_n = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$.

**1.** Vérification que $(u_n)$ est une suite géométrique.

On a $u_{n+1} = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)u_n$. D'où $(u_n)$ est ue suite géométrique de raison $q = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$ et de premier terme $u_0 = 1$.

On peut remarquer pour $a = 0$, $(u_n)$ est une suite constante avec $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et pour $a = 1$, $(u_n)$ est une suite constante nulle.

**2.** Calcul de la limite.

Pour $a = 0$, $\lim u_n = 1$. Et pour $a \neq 0$, on a d'une part $-a^2 < a^2$ ce qui nous donne

$$1 - a^2 < 1 + a^2$$

Et en d'autre part $-1 < 1$ ce qui nous donne

$$-1 - a^2 < 1 - a^2 \text{ ou bien } -(1+a^2) < 1 - a^2$$

Donc $-(1+a^2) < 1 - a^2 < 1 + a^2$ ce qui nous donne

$$-1 < \frac{1-a^2}{1+a^2} < 1.$$

D'où $\lim u_n = \lim \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n = 0$.
Récapitulation :

$$\lim u_n = \begin{cases} 1, & si\ a = 0 \\ 0, & si\ a \neq 0 \end{cases}$$

**3.** Calcul de la somme.

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)}$$