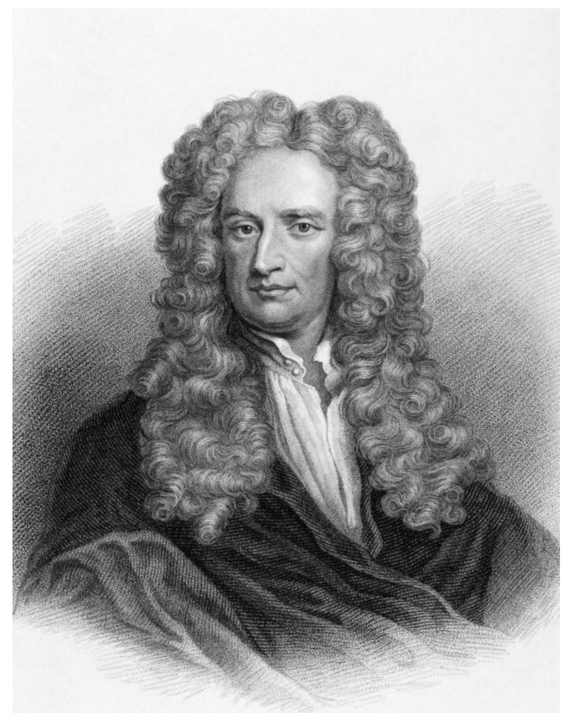
Chapitre III

Dynamique du point matériel

La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes du mouvements des corps



Isaac Newton 1642 - 1727

Plan du cours

III.1. Généralités

III.2.Principe d’inertie (1ère loi de Newton)

III.3. Quantité de mouvement

III.4. Notion de Force (2ème loi de Newton)

III.5. Principe action-réaction (3ème loi de Newton)

III.6. Application des lois de Newton – Les forces

- III.6.1. Loi de la gravitation universelle
- III.6.2. Les forces de contact

III.7. Moment cinétique d’une particule

III.8. Forces d’inertie

Principe d'inertie

C'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« **Toute particule libre conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur elle** »

Remarque

Comme le mouvement est une notion relative (des observateurs dans des référentiels différents n'observent pas le même mouvement) à quoi est rapporté le mouvement de la particule dans le principe d'inertie. Cela nous amène à définir un **référentiel d'inertie**

référentiel d'inertie ou Galiléen

Tous les repères dans lesquels la première loi de Newton est applicable sont appelés repères Galiléen ou d'inertie

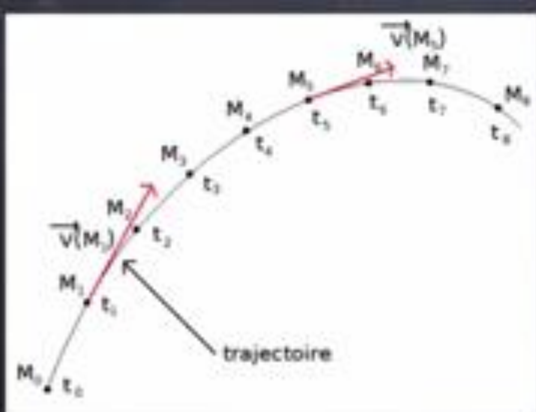
Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur terre, le repère au sol (référentiel du laboratoire) constitue un bon repère d'inertie

Pour décrire le mouvement des planètes par rapport au soleil, le référentiel héliocentrique dont l'origine est le centre du soleil et ses axes pointent vers trois étoiles éloignées réputées fixes est beaucoup plus utilisé. Notons que ce référentiel ne tourne pas avec le soleil.

Remarque

- ✓ Tout référentiel qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d'inertie.

Description du mouvement avec le vecteur vitesse



Modélisation des actions

$$\overrightarrow{P}$$

Quantité de mouvement

Masse

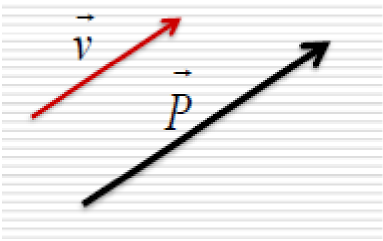
La masse d'un système correspond à la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne. Elle caractérise l'inertie d'un corps soit sa résistance à tout changement du vecteur vitesse.

Quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse *m* et se déplaçant

à la vitesse $\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$



« Une particule libre, se déplace donc avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen. »

$$\vec{P} = cste \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Exemple de conservation de la quantité de mouvement

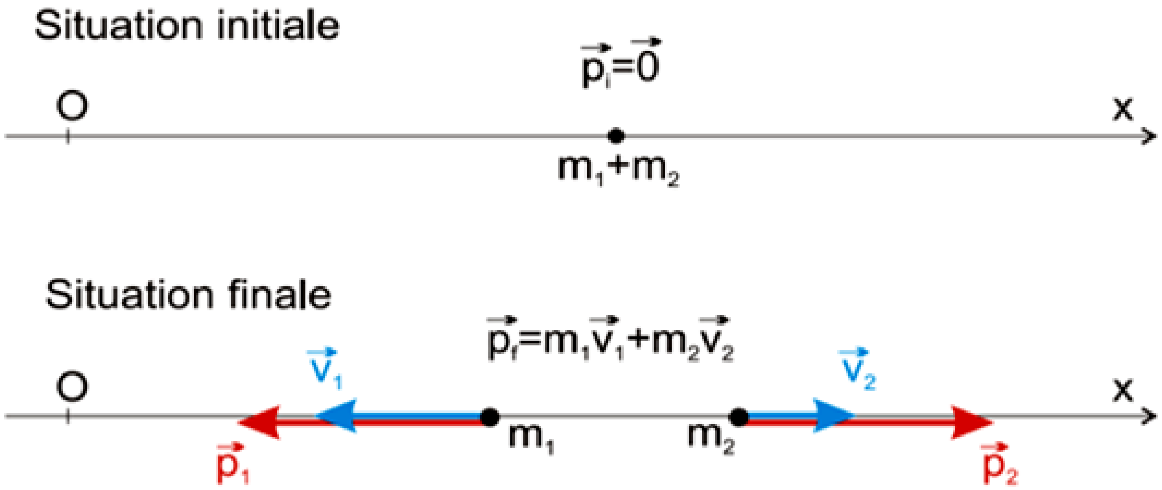
Un fusil de masse 0,8 kg tire une balle de masse 0,016 kg animée d'une vitesse de 700 m/s. calculer la vitesse de recule du fusil.

Avant le tir : la quantité de mouvement totale est nulle

Après le tir :

La quantité de mouvement de la balle est : $P_1 = m_1\, v_1$ = 0,016 x 700 = 11,2 kg m/s

La quantité de mouvement du fusil est $P_2 = m_2\, v_2 = P_1 \Longrightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \Longrightarrow v_2 = 14$ m/s



Notion de Force (2ème loi de Newton)

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée *FORCE.*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\,m\vec{v})}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}$$

Différents types de forces existent :

- Forces d'interaction à distance (Force de gravitation) ;
- Forces de contact (Forces de frottement)

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Si la masse du système est constante alors:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Cette relation associe le terme cinétique qui est l'accélération au terme dynamique qui correspond aux forces exercées

Principe de l'action-réaction (3ème loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, lorsque deux particules sont en interaction, elles exercent l'une sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et de même direction (Fig. 3.2).

Si $\vec{F}_{12}$ est la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par la particule (2) sur la particule (1), on a alors :

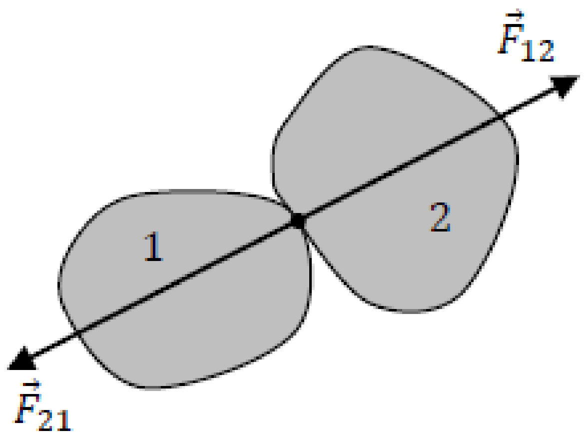


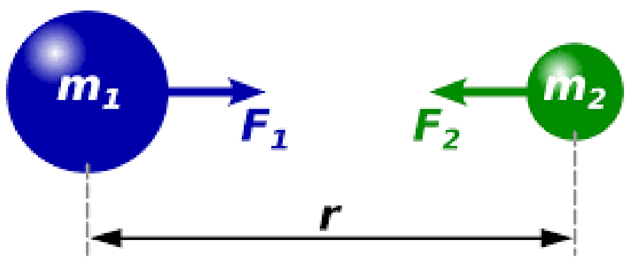
Figure 3.2

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Application des lois de Newton
Les forces

Loi de la gravitation universelle

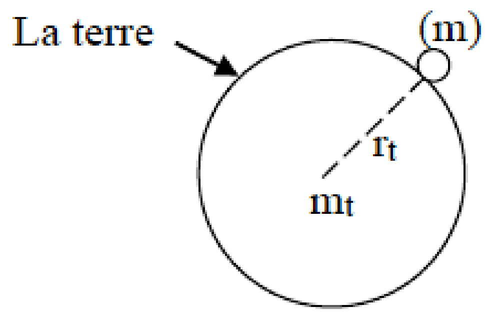
Ecrite pour la première fois par Newton en 1650.Elle décrit l’attraction entre deux masses placées l’une au voisinage de l’autre



$$F_1 = F_2 = G\,\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

où $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI est la constante de la gravitation universelle

Gravitation à la surface de la terre



m_t et r_t sont la masse et le rayon de la terre respectivement tel que : $m_t = 5.98.\ 10^{24}$ kg et $r_t = 6.37.10^6$ m

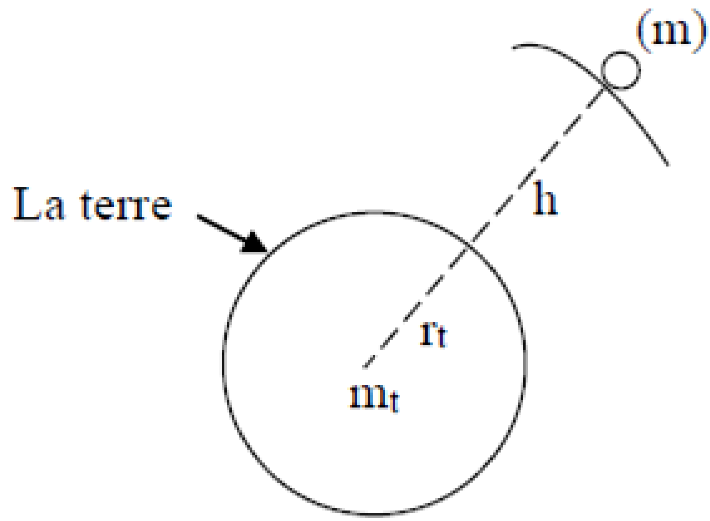
$$P = F_g = m\,g = G\,\frac{m\,m_t}{r_t^2}$$

La gravitation g est :

$$g = G\,\frac{m_t}{r_t^2}$$

Application numérique : g = 9.8 N/kg

A une altitude h de la terre

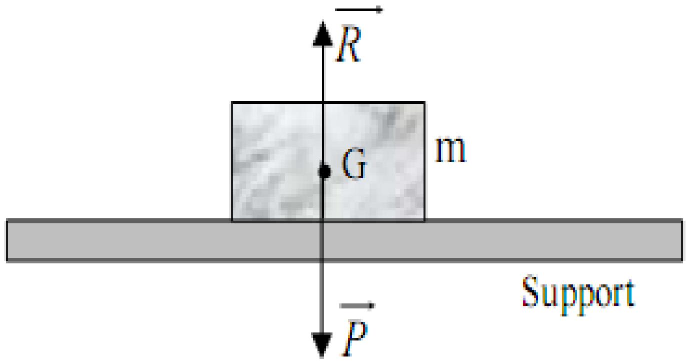


$$F_{g'} = m\ g' = G\frac{m\ m_t}{r^2}$$

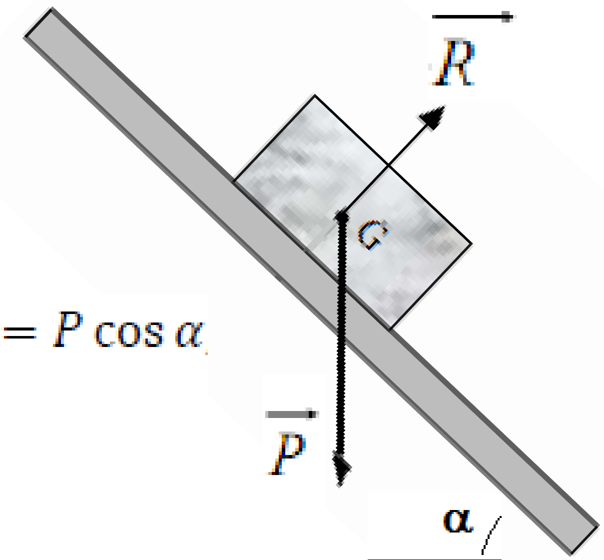
Tel que $r = r_t + h$
D'où :

$$g' = g\ \frac{{r_t}^2}{(r_t + h)^2}$$

Réaction d’un support



$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{R} = -\vec{P}$$



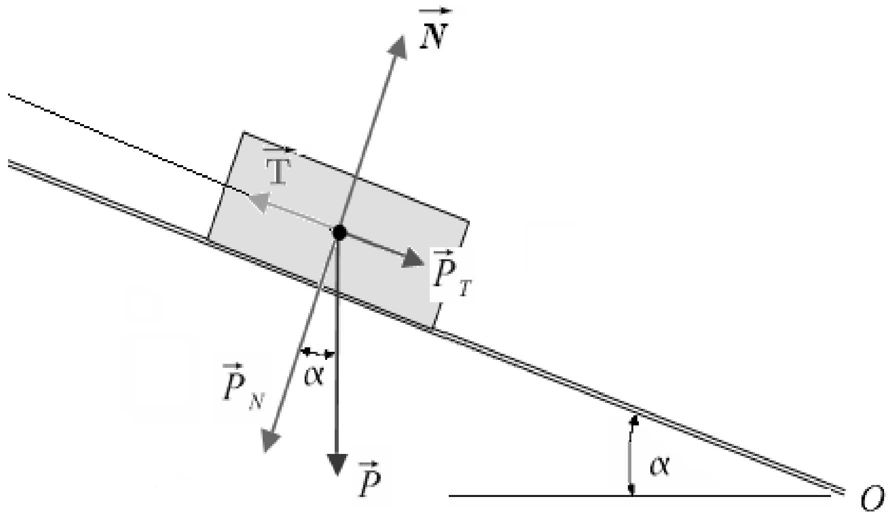
$$R = P\cos\alpha$$

Considérons un objet placé sur un support solide. L’objet ne peut pas pénétrer dans le support: il y a une force appelée réaction du support et notée R ou N qui s’y oppose. Cette réaction s’applique sur l’objet au niveau du contact objet-support, et sa direction est orthogonale à la surface du support au niveau du contact.

Exemple

Une brique de masse m est maintenue en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale par un fil non élastique de masse négligeable. Le contacte entre le solide et le plan incliné est sans frottement

1. Rappeler à quelle condition le solide est en équilibre.
2. Trouver les expressions de la tension T du fil et la réaction N du plan en fonction de m, g *et* α.
3. On coupe le fil, déduire l'expression de l'accélération de la brique. Quelle est la nature du mouvement.



1. Condition d'équilibre :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$$

2. Expressions de T et N

Par projection sur l'axe tangentiel

$$P_T - T = 0 \Longrightarrow T = mg\sin\alpha$$

Par projection sur l'axe normal

$$P_N - N = 0 \Longrightarrow N = mg\cos\alpha$$

3. Accélération de la brique

Une fois le fil coupé, la tension T n'existe plus. On écrit donc le PFD

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

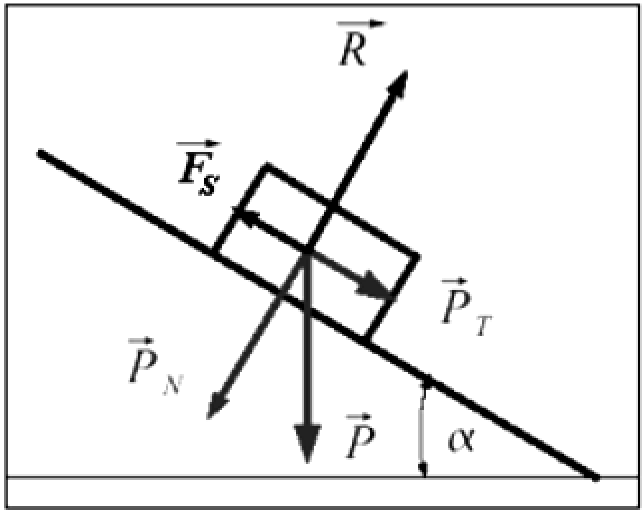
Par projection sur l'axe tangentiel (direction du mouvement)

$$P_T = m\,a \Longrightarrow mg\sin\alpha = m\,a$$

Donc $a = g\sin\alpha$

Frottement solide

✓ **Frottement statique** : (Solide qui ne bouge pas sur un plan incliné)



Pour toute une série de valeurs α inférieur à une valeur limite α_o qui au-delà correspond au début du glissement, la brique reste immobile. On peut alors écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_s} = \vec{0}$$

Par projection sur les deux axes on aura :

$$P_T = F_s = mg \sin\alpha$$

$$P_N = R = mg \cos\alpha$$

On divisant les deux équations l'une sur l'autre on aura

$$\tan\alpha = \frac{F_s}{R}$$

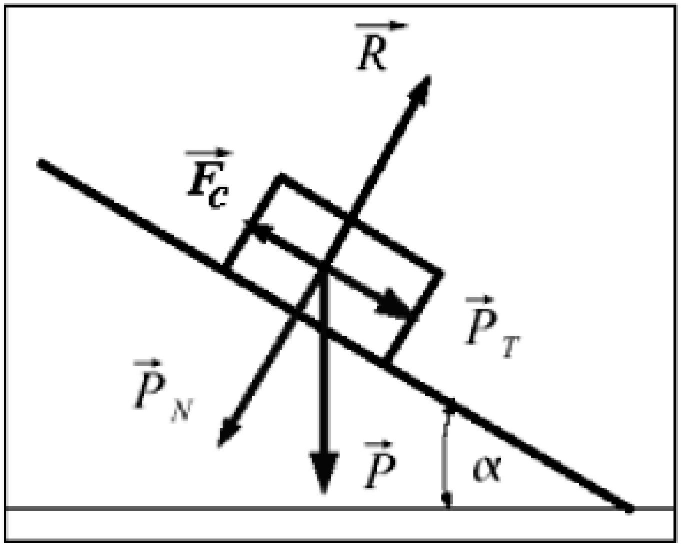
Lorsque α augmente la composante tangentielle du poids P_T augmente. La nature des surfaces en contact permet à la force de frottement F_s de s'adapter de façon à maintenir l'équilibre. Cette force de frottement F_s atteint sa valeur limite pour α_o. on définit alors le coefficient de frottement statique

$$\mu_s = \tan\alpha_o \qquad\qquad F_S = \mu_S R$$

- ✓ **Frottement cinétique (dynamique)**

En faisant croitre α au-delà de la valeur limite α_o, la brique se met à glisser. Son mouvement est uniformément accéléré

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_c} = m\vec{a}$$



De même que précédemment, on obtient une condition de dynamisme du système :

$$\mu_c = \frac{F_c}{R} \qquad F_c = \mu_c R$$

Le coefficient de frottement cinétique est dans la plupart des cas inférieur au coefficient de frottement statique.

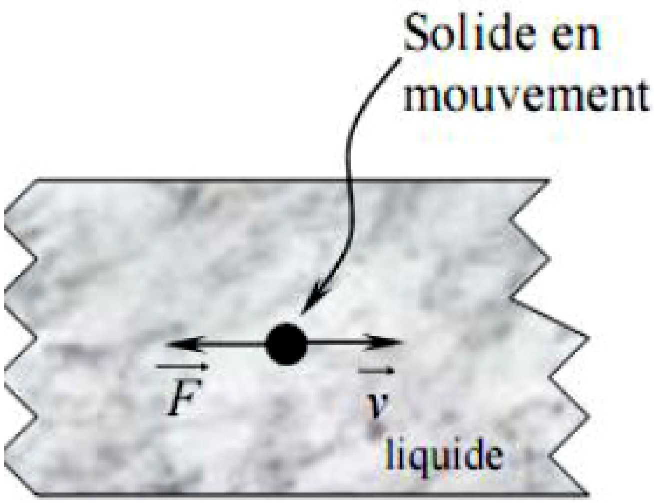
Exemple

On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse m = 3 kg. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottement statique et cinétique sont respectivement $\mu_s = 0{,}6$ et $\mu_c = 0{,}3$.

1. Calculer l'angle α_o de la benne pour provoquer le glissement de la brique.
2. Si $\alpha = 45°$, déterminer l'accélération de la brique (g = 10 ms^{-2}).

Frottement visqueux

Le frottement visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide (air, liquide ou autre). Il est créé par les particules du fluide qui viennent choquer la surface de l'objet M quand ce dernier est en mouvement. Il existe des modélisations de ce phénomène qui sont très complexes. Nous nous limiterons ici à donner une loi approchée déterminée expérimentalement. Pour de faibles vitesses, le frottement est quasiment proportionnel en norme à la vitesse de déplacement de l'objet.



$$\vec{F} = -k\,\vec{v}$$

$\vec{F}$: force de frottement

$\vec{v}$: vitesse de l'objet M

k : constante positive

Chute libre avec résistance de l'air

Exercice 4 :

Un flocon de neige assimilé à un point matériel de masse m, tombe verticalement sans vitesse initiale. Il est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse v, de la forme : $\vec{f} = -km\vec{v}$, où k est une constante positive.

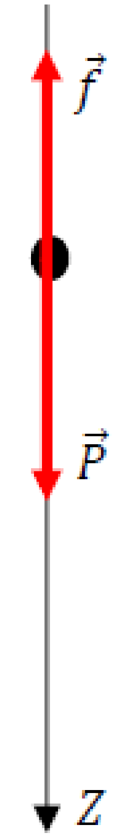
1. Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur le flocon.
2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique.
3. En projetant cette équation vectorielle selon l'axe de chute, établir l'équation différentielle scalaire du mouvement.

4. En tenant compte des conditions initiales, établir $v(t)$ la loi de vitesse du flocon en fonction du temps ;
5. Déterminer v_{lim}, la vitesse limite du flocon en fonction de k et g.

Les différentes forces agissant sur le flocon :

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Les forces de frottements fluide : $\vec{f} = -km\vec{v}$



Le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - km\vec{v} = m\vec{a}$$

Projection selon l'axe de la chute (OZ) :

$$mg - kmv = ma$$

L'équation différentielle scalaire du mouvement :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - kmv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + kv = g$$

$$\frac{dv}{dt} + kv = g \quad ----- \quad (1)$$

Pour résoudre cette équation on utilise une solution particulière notée ***S*** tel que

***S* = Cst** donc $\frac{dS}{dt} = 0$

$$\frac{dS}{dt} + kS = g \quad ----- \quad (2) \Rightarrow kS = g \;\; d'ou\, S = \frac{g}{k}$$

Si on écrit l'équation (1) _ (2) on obtient

$$\frac{dv}{dt} - \frac{dS}{dt} + kv - kS = 0 \quad \Rightarrow \frac{d(v-S)}{dt} + k(v-S) = 0$$

$$\frac{d(v-S)}{(v-S)} = -k\,dt \;\; \Rightarrow \int \frac{d(v-S)}{(v-S)} = -k \int dt$$

$$ln(v - S) = -k\,t + C$$

$$v - S = e^{-k\,t+C} = A\,e^{-k\,t} \Rightarrow v = A\,e^{-k\,t} + S$$

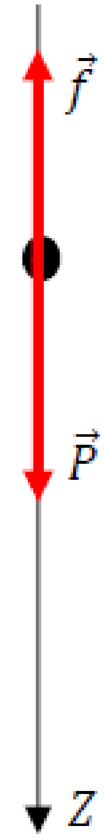
$$v = A\,e^{-k\,t} + \frac{g}{k}$$

A $t = 0$ *on a* $v = 0$ *d'où* $A = -\frac{g}{k}$ *donc*

$$v = \frac{g}{k}\,(1 - e^{-k\,t})$$

Déterminer la vitesse limite v_{lim} du flocon :

$$v_{lim} = \lim_{t \to \infty} v(t) = \frac{g}{k}$$



D'après le PFD : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \mathbf{mg} - \boldsymbol{kmv} = \boldsymbol{ma}$

$\boldsymbol{v = v_l}$ lorsque $\boldsymbol{a = 0} \Rightarrow \boldsymbol{v_l = \frac{g}{k}}$ **(méthode 2)**

Forces de tension

L'un des plus importants mouvements oscillatoires est le mouvement sinusoïdal dans la mesure où il représente beaucoup de mouvements réels. Pour la force de tension ou force de rappel, l'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$$\vec{F} = -k\,(l - l_o)\,\vec{u}$$

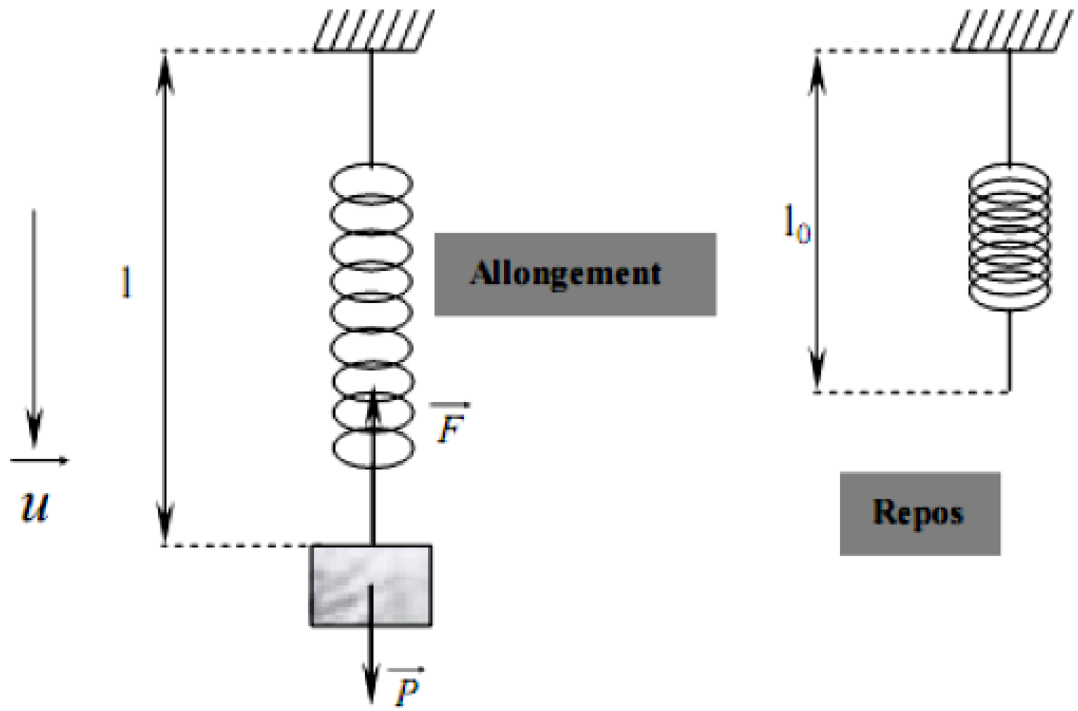
$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{u}$$

k : constante appelée constante de raideur;

l : longueur du ressort,

l_0: est la longueur à vide (non étiré)

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé suivant la direction du fil.



Le signe négatif de la relation traduit le fait que cette force s'oppose à l'allongement.

Moment cinétique d’une particule

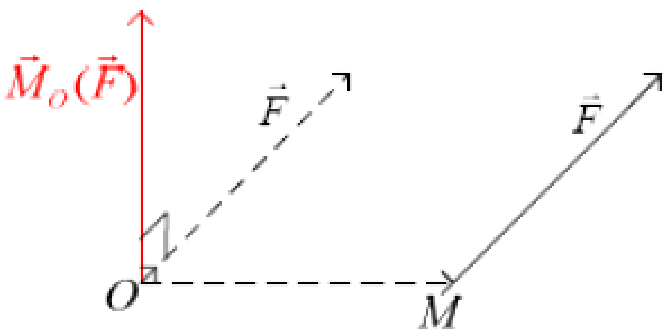
La quantité de mouvement s’est révélée très utile dans l’étude des mouvements de translation.

Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation ; on l’appelle aussi **quantité de mouvement de rotation**.

Moment d'une force

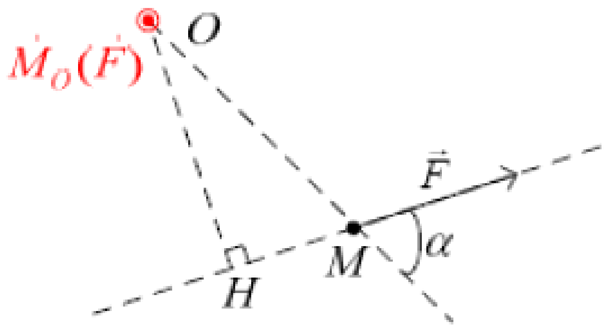
Soit une particule M de masse m se trouvant en un point repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On définit le moment de $\vec{F}$ par rapport au point O par :

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



Le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est donc perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

Dans le plan $(O, M, \vec{F})$:

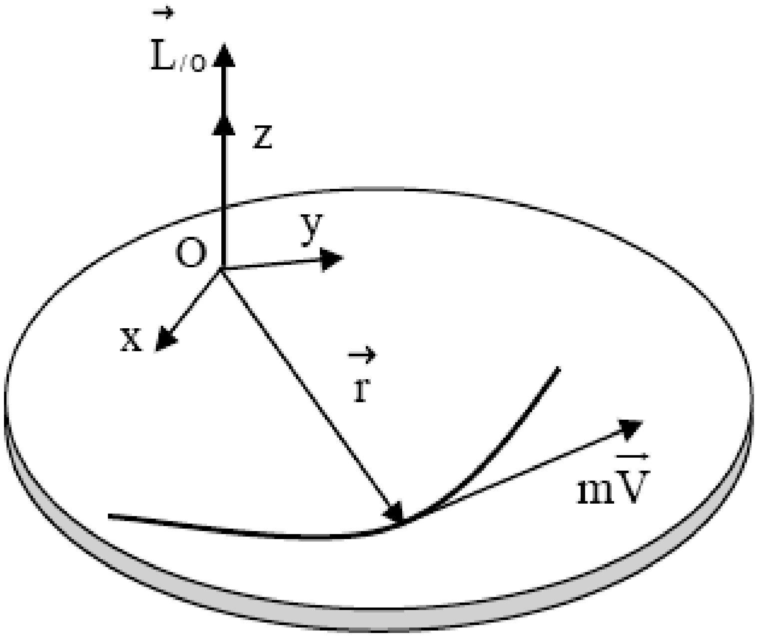


$$\left\|\vec{M}_O(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\vec{F}\right\| \times \left|\sin\alpha\right| = OH \times \left\|\vec{F}\right\|$$

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

Moment cinétique

Si la particule M de masse m se déplace à la vitesse $\vec{v}$, son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au point O, est défini par :



$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \quad \text{ou} \quad \vec{L}_o = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$

$\vec{P}$ étant la quantité de mouvement de M

$$[\vec{L}_o] = M\,L^2T^{-1} \;\; (kg\,m^2s^{-1})$$

L'intérêt de l'introduction de cette grandeur vient de la relation entre sa variation temporelle (dérivée) et la somme des moments des forces extérieures appliquées au système: c'est le *théorème du moment cinétique.*

Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad car\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge \Sigma\,\vec{F} \qquad car\ \vec{v} \wedge m\,\vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \Sigma\,\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})\ c'est\ le\ \mathrm{T.M.C}$$

Correspondance entre le PFD et le TMC

Si le PFD lie forces extérieures appliquées au point matériel et variation de sa quantité de mouvement:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

le théorème du moment cinétique TMC relie la somme des moments de ces forces par rapport à un point donné et variation du moment cinétique par rapport à ce même point.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$$

Intuitivement, le théorème du moment cinétique est une sorte d'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique pour ce qui est de la rotation du point *M* par rapport à *O*.

Forces d’inertie

on ne peut appliquer le PFD et le TMC que dans les référentiels d’inertie. Autrement, ils ne sont pas valables. Cette situation est très courante, puisqu’on peut très facilement avoir un référentiel qui ne constituerait pas un référentiel d’inertie. Pour cela, il suffit qu’il soit accéléré (ainsi son mouvement n’est plus rectiligne et/ou uniforme).

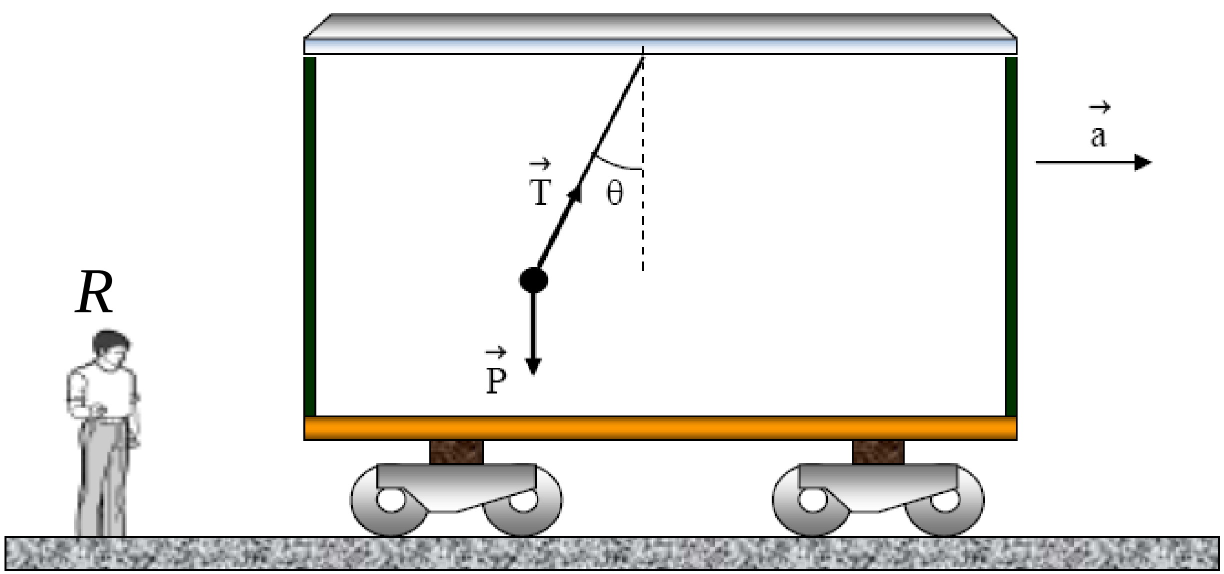
Il s’avère que l’on peut tout de même continuer à employer le PFD et le TMC pourvu que… aux forces normalement présentes dans le problème, on prenne la peine d’ajouter des forces additionnelles dites fictives que l’on appellera plutôt forces d’inertie

Exemple « principe de D'Alembert »

Dans *R* on peut écrire le PFD puisque ce référentiel est inertiel. Cette somme de forces donne donc naissance à une accélération dans *R*

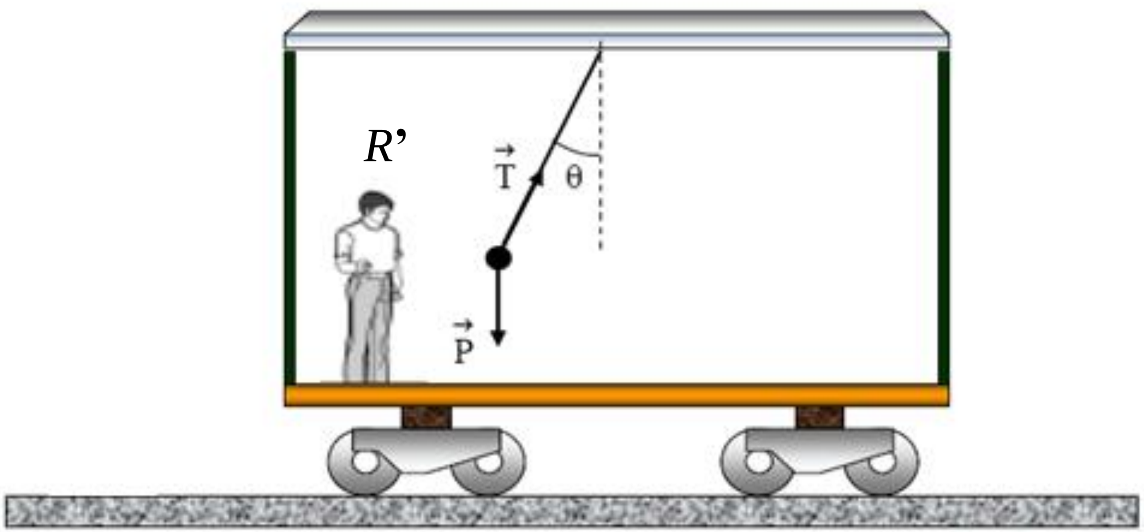
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



Dans le référentiel *R*', tout ce que l'on peut dire c'est que le corps est immobile (par hypothèse). Ainsi son accélération $\vec{a}'$, mesurée dans *R*', doit être nulle. Or il n'est pas correct d'écrire

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}' = 0$$



$$\text{on peut ecrire dans } R' \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Avec $\vec{a}$ l'accélération mesurée dans *R*

Ainsi, dans le référentiel *R'*, nous obtenons une relation fort semblable à celle du PFD dans un référentiel d'inertie, si ce n'est qu'aux forces du problème initial il faut ajouter une force additionnelle (la fameuse force d'inertie) d'expression

$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ donc $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = 0$