Chapitre 3 : Aspects statistiques de l'assurance

L'assurance repose sur la notion de risque, qu'il est nécessaire d'évaluer en utilisant des techniques mathématiques et statistiques.

L'utilisation des statistiques et le calcul de la cotisation

Elles sont indispensables à l'assurance pour déterminer la probabilité de réalisation du risque. Cette probabilité s'appelle la fréquence. Il est également possible de déterminer le coût moyen d'un sinistre.

A partir de ces éléments, l'assureur peut alors calculer le montant de la cotisation d'équilibre, c'est-à-dire le montent moyen nécessaire pour compenser les risques entre eux.

I- La loi des grands nombres

Les techniques de calcul actuariel ont pour objet d'évaluer la contribution 'équitable' de chaque assuré afin de couvrir les sinistres futurs. Ces calculs sont possibles sous certaines conditions grâce à la loi des grands nombres.

Les conditions d'application de la loi des grands nombres :

1- Variables aléatoires identiques : tous les individus assurés sont confrontés aux mêmes risques (la même probabilité de subir un sinistre + même distribution de probabilité des dommages en cas de sinistre). Exp : une maison et un atelier de production ne sont pas des risques homogènes en assurance incendie.
2- Variable aléatoire indépendante : la probabilité d'avoir un sinistre ne dépend pas de la réalisation d'un sinistre à un autre assuré. Exp : les appartements d'un même immeuble sont des risques dépendants, car si un incendie se déclenche dans l'un des appartements, tous les autres appartements peuvent être atteints.

La loi des grands nombres nous renseigne que, lorsque les sinistres sont distribués de manière identique et indépendante, l'indemnité moyenne par assuré (qui est aléatoire) est presque constante et donc prévisible.

Prenons un exemple pour illustrer ceci :

Considérons une population composée de K individus repérés par un indice i= 1,2,3…,K, soumis à un risque de sinistre représenté par une perte monétaire S, avec une probabilité P

Désignons par Xi la variable aléatoire qui représente l'indemnité de l'individu i en cas de réalisation du risque.

On a par définition, si Xi>0 : Xi= S si l'individu i subit un sinistre (probabilité P)

Xi=0 dans le cas contraire (probabilité (1-P)

Si les Xi sont indépendants, alors :

$$\lim_{K \to +\infty} \left(\frac{X1 + X2 + \cdots + Xn}{N} \right) = PS$$

Donc, si les risques sont indépendants, et le nombre N assez grand, le remboursement moyen tend presque sûrement vers l'espérance mathématique du risque, que l'on appelle ***prime actuarielle ou équitable*** π

$$\pi = PS$$

En d'autres termes, si on fixe la prime d'assurance au niveau de l'espérance mathématique de l'indemnité, les indemnités payées seront approximativement couvertes par les primes reçues.

II- La prime actuarielle simple

1- La prime pure

La prime pure est le montant du sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur contre le risque. Mathématiquement, elle est égale à l'espérance des pertes.

La valeur de la prime est obtenue de façon à couvrir les prestations (indemnisations) assurées sans laisser ni bénéfice, ni perte à l'assureur.

C.à.d : ***Prime pure π = valeur (prime) actuelle probable***

= PS = E(Xi)

Cette prime n'est pas assez sécurisante pour la compagnie d'assurance (qui recherche de rester solvable) car la moyenne ne mesure pas les extrémités des distributions (exp : des dégâts très importants).

L'assureur demande alors une prime plus élevée, majorée d'un taux de chargements (α) strictement positif.

La prime ainsi calculée s'appelle ***la prime chargée***. Elle se calcul sur la base de la prime pure :

Prime chargée $\pi' = E(Xi) + \alpha\, E(Xi)$

Nous pouvons calculer la prime pure et la prime chargée pour le $K_{ième}$ risque, sous la forme $E(X_k)$ et $\pi_k = (1+\alpha)\ E(X_k)$, ou pour l'ensemble des risques, sous la forme E(S) et $\pi = (1+\alpha)\ E\ (S)$, où $S= X_1+X_2+\ldots+ K_k$ désigne le montant cumulé des sinistres de l'ensemble des risques. Lorsque l'ensemble des risques suit le modèle individuelle. Càd lorsque les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_k sont indépendantes et identiquement distribuées, les relations suivantes sont trivialement vraies :

$E(X_k)= E(S)/K$ et $\pi_k = \pi/K$, pour K allant de à k

A ces deux notions de primes (pure et chargée) s'ajoute la notion de ***la prime commerciale*** qui correspond à la prime effectivement payée par l'assuré cette prime s'obtient en appliquant un deuxième chargement à la prime chargée, appelé *chargement commercial*, incluant les différents éléments suivants : la rémunération du capital, les taxes, le coût de la réassurance, et divers frais de gestion.

$$\pi'' = \pi + \alpha\pi + g\,\pi''$$

Prime commerciale = prime pure + chargements de gestion + chargements commerciaux (de sécurité)

Avec g est un pourcentage de charges commerciales.

Remarque :

* Avec l'ensemble des primes pures, l'assureur espère faire face à la charge des prestations (rémunération des assurés sinistrés).

* L'ensemble des chargements de gestion permettent à l'assureur de faire face aux frais de gestion.

* Avec les chargements de sécurité, l'assureur espère dégager un bénéfice.

III- Notion de franchise

Un manque dans l'encadrement du comportement des assurés peut conduire à une augmentation sensible du montant total des sinistres à rembourser par les assureurs. Pour cela les compagnies d'assurance appliquent ***les franchises***.

La franchise est le montant des dommages qui restent à la charge de l'assuré suite à un sinistre. Cette franchise peut être absolue (un montant fixe) ou relative (un pourcentage des dommages).

Néanmoins, on peut prévoir les deux types de franchises dans un contrat.

IV- La règle proportionnelle de capitaux

Si à l'occasion d'un sinistre l'assureur constate que la valeur déclarée (assurée) à la souscription du contrat est inférieure à la valeur réelle du bien assuré, l'indemnité sera réduite proportionnellement au rapport qui existe entre la valeur déclarée et la valeur réelle.

Si **valeur déclarée (VD) < valeur réelle (VR) => indemnité = Dommage * VD/VR**

Application

Un assureur souscrit un contrat d'assurance dommage d'une durée annelle pour garantir un véhicule d'une valeur de 800 000UM appartenant à une personne x.

Le contrat prévoit une franchise relative de 5% avec un minimum de 2000UM par semestre.

Le tarif applicable par l'assureur est une exploitation statistique de la branche automobile qui fait ressortir que sur 1000 assurés, le risque se réalise 20 fois. En plus, l'intensité moyenne des sinistres est estimée à 70%.

1- Calculer la prime d'assurance que x doit payer.
2- Après 5 mois x a eu un sinistre suite à une collision avec un autre véhicule y. La responsabilité de cet accident est incombée totalement à x. Les dégâts enregistrés sont estimés à 20 000UM pour x et 30 000UM pour y.
    a- Déterminez le montant de l'indemnisation que l'assureur verse à x
    b- Quel est le montant global que l'assureur est appelé à décaisser à l'occasion de ce semestre ?
    c- Calculer à nouveau le montant de l'indemnisation à laquelle x aura le droit si l'assureur se rond compte à l'occasion de cet accident que la valeur réelle du véhicule est de 1 million de dinars.

Correction

VD = 800 000, Fr =5% (min =2000)

1- Prime payé par x

Prime = VD* probabilité de réalisation * intensité moyenne

= 800 000* 20/1000 * 0.7 = **11 200** UM

2- Dommage : x= 20 000 et y = 30 000

a- indemnité (x) = dommage (x) – franchise

Fr = 20 000 * 5% = 1 000

Le montant de la franchise (1 000) est < 2 000 => la compagnie s'aligne sur le minimum

D'où : Indemnité = 20 000- 2 000 = **18 000** UM

b- Le montant global versé par l'assureur

Responsabilité civile RC = 30 000

+ Dommage = 18 0000

=> Total = 30 000 + 18 000 = **48 000** UM

c- VD = 80 000, VR = 1 000 000

Indemnité réduite : Dommage * VD/ VR = 20 000 * 800 000/1 000 000 = **16 000** UM

Indemnité Finale = Indemnité réduite – Franchise

= 16 000 – 2 000

= **14 000** UM

V- Le mécanisme d'un contrat d'assurance

Par contrat d'assurance (matérialisé par une police d'assurance), l'assureur s'engage à verser une prestation en cas de sinistre sur le risque assuré moyennant le paiement d'une prime versée par l'assuré.

La prestation versée par l'assureur est appelée montant du sinistre (souvent noté S ou X), il s'agit d'une variable aléatoire qui peut correspondre à un ou plusieurs sinistres.

La variable aléatoire est définie par son espérance et sa variance.

$$E(s) = \sum_{i}^{k} S_i P$$

La variance est définie par :

$$V(s) = E[\left(S - E(S)\right)^2]$$

V(S) traduit la dispersion des résultats se S autour de la moyenne. L'écart type (noté δ) est la racine carrée de la variance V(S).

$$\delta = \sqrt{V(S)}$$

IV- Résultat de l'assureur

En début d'exercice, la compagnie d'assurance est sensée connaitre à l'avance l'espérance $E(X_i)$ de la charge aléatoire des prestations X_i relatives au risque i. Il faut faire payer pour chaque risque (assuré) une prime pure π_i correspond exactement à l'espérance $E(X_i)$.

$$E(X_i) = \pi_i$$

Une fois cette prévision effectuée, l'assureur cherchera à éviter toute perte ou une éventuelle ruine en comparant entre les ressources (produit) et les dépenses (charges).

Les produits de l'assureur sont, principalement, les primes versées et les produits financiers correspondants aux placements des primes PF. Alors que les charges sont constituées des prestations versées ($\sum X_i$) et les frais de gestion FG.

Le résultat de la compagnie d'assurance se calcul donc :

R= Somme des primes+ PF – Somme des prestations – FG

On a déjà vu que : $\pi'' = \pi + \alpha\pi + g\pi''$

Remarque : on fait l'hypothèse que les chargements + les produits financiers correspondent globalement aux frais de gestion

d'où : $R = \sum_{i=1}^{k}(1+\propto)P_i\, X_i - \sum_{i=1}^{k} P_i X_i$

$R = \sum_{i=1}^{k}(\propto)P_i\, X_i$

Le résultat de l'assureur à partir de N assurés s'écrit :

$$R_n = n\pi - n\,\alpha\,\pi - \sum_{i=1}^{n} P\,X_i$$

$$E(R_n) = n\pi - n\alpha\pi - nE(X_i)$$

$$E(R_n) = n\pi - n\alpha\pi - n\pi$$

$$E(R_n) = n\alpha\pi$$

Celle-ci représente la prime chargée.

L'écart type du résultat

Le calcul des probabilités permet de démontrer que si on multiplie le nombre de risque par N, l'incertitude absolue sera multipliée par $\sqrt{n}$, et que l'incertitude relative sera divisée par $\sqrt{n}$.

$$E(X_i) = n\,E\,(X_i)$$

$$\delta^2\left(\sum_{i}^{n} X_i\right) = n\,\delta^2(X_i)$$

D'où $\delta(\sum_i^n X_i) = \sqrt{n\,\delta^2(X_i)} = \sqrt{n}\,\delta(x_i)$

Ceci représente l'incertitude absolue.

IIV- Le risque de ruine

Si l'assureur dispose d'un capital initial FP et souhaite éviter le risque de perte, ou du moins le risque de ruine, il faut éviter que FP+ R< 0 ou encore R < - FP.

On peut écrire la probabilité que l'entreprise enregistre une perte par :

$$P(R < -FP) = \frac{R_n+E(R_n)}{\delta\,(R_n)} < -\frac{FP+E\,(R_n)}{\delta(R_n)}$$

Le terme de droite est appelé coefficient de sécurité, noté β.

$$\beta = \frac{FP + n\,\alpha\,P}{\delta(R_n)}$$

$$\beta = \frac{FP + E\,(R_n)}{\delta(R_n)}$$

Pour un risque donné, le risque de ruine diminue lorsque β augmente. Ceci est possible si :

- FP augmentent (la richesse disponible, ou marge de solvabilité) ;

- Augmenter le nombre d'assurés, mais cette augmentation n'est pas toujours possible car elle dépend de la taille du marché.

- Augmenter α (le taux de chargement de sécurité) ce qui va engendrer une augmentation de la prime commerciale qui peut entrainer une perte de la clientèle.

N.B : Le coefficient de sécurité doit être porté à un niveau relativement élevé. En général, la ruine est pratiquement impossible si β > 3.

IIIV- La réduction du risque de ruine par la réassurance

La réassurance permet de diminuer l'espérance mathématique du résultat d'exploitation annuel, car une portion du bénéfice est normalement transférée vers la réassurance, mais elle devait diminuer suffisamment le risque pour que β se trouve augmenté.

Soit θ le coefficient de rétention et (1-θ) le coefficient de cession.

- L'assureur retient $\theta\ \sum_{i=1}^{n}\pi''$ et cède $(1-\theta)\ \sum_{i=1}^{n}\pi''$ de primes ;

- L'assureur prend en charge $\theta\ \sum_{i=1}^{n}X_i$ et cède $(1-\theta)\ \sum_{i=1}^{n}X_i$, sachant que 0 < θ <1.

$E\ (R_n^r) = \theta\ E\ (R_n)$ avec R_n^r est le résultat de l'assureur en présence de réassurance.

$E\ (R_n^r) < E\ (R_n)$ et $\delta\ (R_n^r) = \theta\ \delta\ (R_n)$ d'où $\delta\ (R_n^r) < \delta(R_n)$.