Correction de la série 1

Exercice 1

1- Le chargement de gestion sur un contrat :

La prime commerciale est égal à : $\pi" = n\pi + n\ \alpha\pi + ng\pi"$

Les frais nets de gestion annuels FNG= 3 500 000DA

$$ng\pi"\text{=FNG=> g}\pi" = \frac{FNG}{n} = \frac{3\ 500\ 000}{1\ 000} = 350DA$$

* Le taux de chargement de gestion « g » :

$$g\pi" = 350 \ => \ g = \frac{350}{1\ 400} = 25\%$$

2- Calcul de l'espérance et de l'écart type de la charge annuelle de sinistre :

La réalisation du risque à une probabilité de P=1%, alors que la non réalisation du risque à une probabilité de (1-P) soit 99%.

E(X) = CP + 0 (1-P)   avec C le coût du sinistre.

E(X) = CP = 100 000* 1% = 1 000DA

Var (X) = $E(X^2) – [E(X)]^2$

$E(X^2) = C^2p + 0^2 (1-P) = C^2P$

Var (X) = $C^2P – (CP)^2= C^2P (1-P)$

$\delta\ (X_i) = \sqrt{Var\ (X_i)} = \sqrt{C^2P(1-P)} = C\sqrt{P(1-P)}$

$\delta(X_i) = 100\ 000\ \sqrt{0{,}01 * 0{,}99} = 9\ 949{,}87$

Pour n=10 000

$E(\sum X_i)$= n E(X_i) = 10 000* 1000= 10 000 000DA

$$\delta\ (\sum_{i=1}^{10000} X_i) = \sqrt{n}\,\delta(X_i) = \ \sqrt{1\ 000} * 9\ 949{,}87 = 994\ 987DA$$

3- l'incertitude relative

$I_n = \frac{\delta\ (X_i)}{E(\sum X_i)} = \frac{994987}{10000000}$= 0,0994= 9,94%

Si n se multiplie par 100 n'= 10 000*100= 1 000 000

$$I_n = \frac{\sqrt{n'}\delta(\sum X_i)}{n'(\sum X_i)} = \frac{\sqrt{1\ 000\ 000} * 9\ 949{,}87}{1\ 000\ 000 * 1\ 000} = 0{,}009 = 0{,}99\%$$

4- Le résultat espéré de l'assureur et son écart type

$E\ (R_n) = recettes - charges$

$$E(R_n) = n\pi'' - FNG - E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = (1\ 400 * 10\ 000) - 3\ 500\ 000 - 1\ 000\ 000$$

$$E(R_n) = 500\ 000$$

$$\delta\ (R_n) = 994\ 987$$

5- La probabilité de perte

$p(perte) = P(R_n < 0) = P(E(R_n) - E(\sum X_i) < 0)$

$= P(\frac{R_n - E(R_n)}{\delta(R_n)} < \frac{0 - E(R_n)}{\delta(R_n)})$

$= P\left(\mu R_n < \frac{-E(R_n)}{\delta(R_n)}\right)$

$= P\left(\mu R_n < \frac{-500\ 000}{994\ 987}\right)$

$= P(\mu R_n < -0{,}50)$

$=1- P(\mu R_n > 0{,}50)$

= 1- F(0,5) [voir la table de la loi normale]

= 1-0,69

= 0,31

Donc l'assureur à une probabilité de 31% de réaliser une perte.

6- Le coefficient de sécurité, pour EF = 1 000 000

$$\beta = \frac{FP + E(R_n)}{\delta(R_n)} = \frac{1\ 000\ 000 + 500\ 000}{994\ 987} = 1{,}5$$

$$\beta = 1{,}5$$

7- probabilité de ruine

$= P(\frac{R_n - E(R_n)}{\delta(R_n)} < \frac{FP - E(R_n)}{\delta(R_n)})$

$= P\left(\mu R_n < -\frac{FP + E(R_n)}{\delta(R_n)}\right)$

$= P(\mu R_n < -\beta)$

$= P(\mu R_n < -1{,}5)$

$=1- P(\mu R_n > 1{,}5)$

= 1- F(1,5) [voir la table de la loi normale]

= 1-0,93= 0,07

Probabilité de ruine = 7%

Exercice 2

1- E(x_i)= 500 DA, $\delta\,(x_i) = 2000DA$

a- Le coefficient de sécurité

$$\beta = \frac{FP + E\,(R_n)}{\delta\,(R_n)}$$

$$E(R_n) = n\,\alpha\pi = n\,\alpha\,E(X) = 3000\,(5\%)500 = 75000$$

$$\delta(R_n) = \sqrt{n}\,\delta(X) = \sqrt{3000}\;\;2000 = 109\,544{,}51$$

$$\beta = \frac{200\,000 + 75000}{109\,544{,}51} = 2{,}51$$

b- La probabilité de ruine

P(ruine) = P $(R_n < -FP)$

= P $(\mu R_n < -\beta)$

= P $(\mu R_n < -2{,}51)$

= 1- F(2,51)

= 1-0,994

= 0,006

2- Pour un coefficient de sécurité $\beta > 4$

a- α= 5%, n= 3000, K= ?

β > 4 => $\frac{K+E(R_n)}{\delta(R_n)} > 4$

=> $\frac{K+E(R_n)}{\delta(R_n)} > 4$

=> $K + n\,\alpha\,E(X) > 4\sqrt{n}\,\delta(X)$

=> K > 4$\sqrt{n}$ δ(X) - n α E(X)

=> K> 4$\sqrt{3000.}$ 20000 - 3000. 6,05 .500

=> K> 363 178,05

b- K= 200 000, n= 3000, α= ?

β>4 => $\alpha > \frac{4\sqrt{n}\ \delta(X)-K}{n\ E(X)}$

=> $\alpha > \frac{438178{,}05-200\ 000}{3000\ (500)}$

=> $\alpha > 15{,}8\ \%$

c- K= 200 000, α= 5%, n= ?

β>4 => $K + n\ \alpha\ E(X) > 4\sqrt{n}\,\delta(X)$

=> $K + n\ \alpha\ E(X) 4\sqrt{n}\,\delta(X) > 0$

=> $200\ 000 + n\ 0{,}05\ (500) - 4\sqrt{n}(200) > 0$

=> $n - 320\ \sqrt{n} + 8000$ (on pose N^2=n)

=> $N^2 - 320\ N + 8000 > 4$

Δ= 70400, N_1= 27,34 ; N_2= 292.66

D'où : n_1 = 747 et n_2= 85649

On accepte n_2= 85 649, car selon la théorie de l'assurance, une compensation au sein de la mutualité n'est efficace que si le nombre d'assuré est important.

3- Le coefficient de rétention

β=4 , θ= ?

L'assureur retient $\theta\ \sum \pi''_i$ et cède à la réassurance $(1-\ \theta) \sum \pi''_i$

Donc : $E(R_n^r) =\ \theta\ E(R_n)\ et\ \ \delta(R_n^r) =\ \theta \delta(R_n)$

$\beta^r\ = \frac{K+\theta\ E(R_n)}{\theta\ \delta(R_n)} = 4$ => $K + \theta\ E(R_n) = 4\ \theta\ \delta(R_n)$

=> $\theta\ = \frac{K}{4\theta\ \delta(R_n)-\ E(R_n)} = \frac{200\ 000}{4(109\ 544{,}51)-75\ 000}$= 0,55

$\theta = 55\%$

La compagnie garde en rétention 55% des primes et cède 45% à la réassurance

Exercice 3 :

$$\beta_1 = \frac{FP + E(R_n)}{\delta(R_n)} = \frac{K_1 + \alpha_1 U_1}{T_1} = \frac{0{,}2\ U\ _1 + 0{,}15 U_1}{100} = 0{,}35 \frac{1000}{100} = 3{,}5$$

$\beta_1 = 3{,}5$

2-

$$\beta_2 = \frac{FP + E(R_n)}{\delta(R_n)} = \frac{K_2 + \alpha_2 U_2}{T_2} = \frac{0{,}2\ U\ _2 + 0{,}1 U_2}{100} = 0{,}3\,\frac{750}{87} = 2{,}58$$

$$\beta_2 = 2{,}58$$

Après fusion :

$$\beta\ = \frac{(K_1 + K_2) + (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_1)}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} = \frac{(0{,}2\ U\ _1 + 0{,}2\ U_2) + (0{,}15 U_1 + 0{,}1\ U_2)}{\sqrt{100^2 + 87^2}}$$
$$= 4{,}33$$

$$\beta\ = 4{,}33$$

3- Pour β = 4, K= ?

$$\beta\ = \frac{K + (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_1)}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}} => K = \beta \sqrt{T_1^2 + T_2^2} - (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_1)$$
$$= 4\sqrt{100^2\ 87^2} - 0{,}2(\ 1000 + 750)$$
$$K\ = 305{,}2$$

Le capital libéré sera : le capital après fusion - capital nécessaire pour β = 4

Capital après fusion= $K_1 + K_2$= 0,2 *1000+ 0,2 750= 350

$$K_{libéré} = 350 - 305{,}2 = 44{,}8$$