Série de TD n°4

Exercice 1 :

On considère le champ de force de composantes cartésiennes : $F_x = y^2 - x^2, F_y = 4xy$.

1. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ entre le point O(0,0) et le point A(1.1) :
   - Suivant Ox (de 0 à 1) puis Oy (de 0 à 1).
   - Suivant Oy (de 0 à 1) puis Ox (de 0 à 1).
   - Suivant la droite OA.
2. Ce champ dérive-t-il d'une énergie potentielle ?

Exercice 2 :

Dans un plan OXY d'un repère $OXYZ$ muni d'une base orthonormée $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère une particule qui se déplace dans le champ de force $\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$, où a étant une constante réelle.

1. Calculer le travail de $\vec{F}$ si la particule se déplace en ligne droite du point $O(0,0)$ au point $A(2,4)$.
2. Calculer $\overrightarrow{rot}\vec{F}$. Déduire la valeur de a pour que $\vec{F}$ soit conservative.
3. Vérifier que l'énergie potentielle associée pour cette valeur particulière de a est :
$$E_p(x,y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}y^2 + 2xy.$$
4. Pour cette valeur particulière de a, que vaut le travail de $\vec{F}$ entre O et A sur n'importe quel trajet ?

Exercice 3 :

Un point matériel de masse m se déplace dans un plan OXY de façon que son vecteur position soit donné à n'importe quel instant t par : $\vec{r} = 2a\cos(\omega t)\vec{i} + a\sin(\omega t)\vec{j}$, où a, b et ω sont des constantes.

1. Exprimer en fonction de $\vec{r}$ la force $\vec{F}$ appliquée au point matériel.
2. Exprimer l'énergie cinétique du point matériel en fonction du temps.

3.1. Calculer le travail lorsque le mobile se déplace de $A(2a, 0)$ à $B(0, a)$.

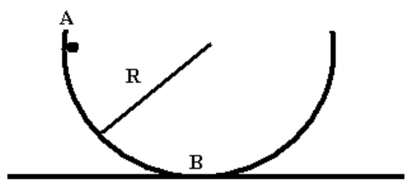
3.2. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Exercice 4 :

Sur un sol horizontal, on lance un projectile avec une vitesse $\vec{v}_0$ qui fait un angle avec l'horizontale. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, trouver la hauteur maximale que le projectile atteindra et la vitesse avec laquelle il reviendra au sol. On néglige la résistance de l'air.

Exercice 5 :

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel de masse $m = 2kg$ d'un point A du bord de la demi-sphère de rayon $R = 1m$ (figure ci-contre). Ce point parvient au point B le plus bas avec une vitesse $v = 4\ m/s$. On prendra $g = 10\ m/s^2$.



1. Montrer que le point est soumis à des frottements.
2. Calculer le travail de cette force de frottement entre A et B.

<u>Corrigé de la série n°4</u>

<u>Exercice 1 :</u>

1. Calcul du travail : $dw = \vec{F}.\overrightarrow{dr} \Longrightarrow dw = (y^2 - x^2)dx + (4xy)dy$

- Suivant Ox (de 0 à 1) puis Oy (de 0 à 1).

  Suivant OX (de 0 à 1) :

$$y = 0 \Longrightarrow dy = 0 \Longrightarrow dw = -x^2 dx \Longrightarrow w_x = -\int_0^1 x^2 = -\frac{1}{3}\, J$$

  Puis suivant OY (de 0 à 1) :

$$x = 1 \Longrightarrow dx = 0 \Longrightarrow dw = 4ydy \Longrightarrow w_y = 4\int_0^1 ydy = 2\, J$$

Alors :

$$w_1 = w_x + w_y = \frac{5}{3}\, J$$

- Suivant Oy (de 0 à 1) puis Ox (de 0 à 1).

  Suivant OY (de 0 à 1) :

$$x = 0 \Longrightarrow dx = 0 \Longrightarrow dw = 0 \Longrightarrow w_y = 0$$

  Puis suivant OX (de 0 à 1) :

$$y = 1 \Longrightarrow dy = 0 \Longrightarrow dw = (1 - x^2)dx \Longrightarrow w_x = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} J$$

Alors :

$$w_2 = w_x + w_y = \frac{2}{3}\, J$$

- Suivant la droite :

$$y = x \Longrightarrow dy = dx \Longrightarrow dw = 4x^2 dx \Longrightarrow w_3 = 4\int_0^1 x^2\, dx = \frac{4}{3}\, J$$

2. $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \Longrightarrow$ le travail dépend pas du chemin suivi $\Longrightarrow$ le champ de force ne dérive pas d'une énergie potentielle.

<u>Exercice 2 :</u>

1. Le travail de $\vec{F}$

$$W_{OA} = \int_O^A \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = \int_O^A (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$$

L'équation de la droite portant le segment OA est : $y = 2x$ donc :

$$W_{OA} = \int_0^2 (x - 2ax)dx + 2(6x - 2x)dx \rightarrow W_{OA} = 18 - 4\text{a}$$

2. $\overrightarrow{rot}\vec{F} = (a - 2)\vec{k}.$

Pour que $\vec{F}$ soit conservative, il faut que $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$, donc $a = 2$.

3. On a :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -x + 2y = -F_x \; ; \; \frac{\partial E_p}{\partial y} = -3y + 2x = -F_y$$

donc $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$, et E_p est l'énergie potentielle associée à $\vec{F}$ pour $a = 2$.

4. La force étant conservative, le travail sur n'importe quel trajet entre O et A est :

$$W_{OA}(a = 2) = E_p(O) - E_p(A) = E_p(x = 0, y = 0) - E_p(x = 2, y = 4) = 10J..$$

<u>Exercice 3 :</u>

1. Le P.F.D s'écrit : $\vec{F} = m\vec{a}$

On a :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2a\omega\sin(\omega t)\vec{i} + a\omega\cos(\omega t)\vec{j} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2a\omega^2\cos(\omega t)\vec{i} - a\omega^2\sin(\omega t)\vec{j}$$

Donc : $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

2. L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_c = \frac{1}{2}m\omega^2a^2\left(3\sin^2(\omega t) + 1\right)$$

3.1. Le travail élémentaire s'écrit :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -m\omega^2\vec{r}.d\vec{r} = -m\omega^2 r dr$$

car en coordonnées polaires : $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$)

On a :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{r_A=2a}^{r_B=a} \left(-m\omega^2 r\right)dr = -m\omega^2\left[\frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{2}\right] \qquad \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \frac{3}{2}m\omega^2a^2$$

3.2. Théorème de l'énergie cinétique : $E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F})$

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}m\omega^2a^2(4 - 1) = \frac{3}{2}m\omega^2a^2$$

<u>Exercice 4 :</u>

L'énergie mécanique est conservée, car il n'y pas de frottements (forces dissipatives).

Choisissons l'énergie potentielle nulle au niveau du sol.

L'énergie mécanique du projectile au point O est :

$$E_M(O) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Au sommet S de la trajectoire :

$$v_y = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_0 cos\alpha\vec{\imath}$$

L'énergie mécanique est alors :

$$E_M(S) = \frac{1}{2}mv_0^2 cos\alpha^2 + mgh_s$$

Où h_s étant la hauteur du sommet par rapport au sol. De l'équation de conservation $E_M(O) = E_M(S)$, On peut déduire :

$$h_s = \frac{v_0^2 sin\alpha^2}{2g}$$

La vitesse au point A où le projectile va retomber :

$$E_M(O) = E_M(S) = E_M(A)$$

On trouvera : $v_A = v_0$

Exercice 5 :

Soit : $E_p(B) = 0$ (on prend l'origine des énergies potentielles au point B)

Energie mécanique au point A :

$$E_M(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0 + mgR$$

Energie mécanique au point B :

$$E_M(B) = E_c(B) + E_p(B) = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

La variation de l'énergie mécanique entre B et A :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(B) = \frac{1}{2}mv^2 - mgR = -4J$$

On remarque que $\Delta E_M \neq 0$, ce qui implique que l'énergie mécanique n'est pas conservée et, par conséquent, le point matériel est soumis à des frottements. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_M = W(\vec{F}_{nc}) = W(\vec{F}_{fr})$$

Par conséquent, le travail des forces de frottement est : $W(\vec{F}_{fr}) = -4J$