2020/18 - W

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Février 2020

Examen de Maths 1
Durée 02 heures

Exercice 1. (4.5 points)

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \neq b$. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposition que :
$$x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{4}{5} \text{ ou } x > \frac{1}{5}.$$

Exercice 2. (6.5 points)

1. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$
Montrer que :
   (a) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
   (b) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
2. On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :
$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\,\mathcal{S}\,y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
   (b) Cet ordre est-il total ?

Exercice 3. (9 points)
On considère les deux applications suivantes :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3 - 2x \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2. \end{array}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Calculer $f(\{-4, 3\})$, $f(]1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 0[)$.
3. Déterminer l'application gof et calculer $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$.
4. gof est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Donner des intervalles I et J, tels que l'application $gof : I \longrightarrow J$ soit bijective.
Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$.

Bon Courage

Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année ST

Février 2020

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice 1. (4.5 points)

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \neq b$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a-b).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons par $P(n)$ la propriété : $\exists k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a-b)$.

(a) Pour $n = 1$, on a

$$a^1 - b^1 = a - b = 1(a-b).$$

Donc,

$$\exists k = 1 \in \mathbb{Z} : a^1 - b^1 = k(a-b).$$

1

D'où $P(1)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists\ k \in \mathbb{Z},\ a^n - b^n = k(a-b)$$

0,5

et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists\ k' \in \mathbb{Z},\ a^{n+1} - b^{n+1} = k'(a-b).$$

On a

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= aa^n - bb^n \\ &= a(b^n + k(a-b)) - bb^n \text{ (grâce à l'hypothèse de récurrence)} \\ &= ab^n + ka(a-b) - bb^n \\ &= (b^n + ka)(a-b) \end{aligned}$$

1,5

Donc

$$\exists\ k' = (b^n + ka) \in \mathbb{Z},\ a^{n+1} - b^{n+1} = k'(a-b).$$

Finalement, on a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n \text{ est divisible par } a - b.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que :

$$x + y > 1 \Rightarrow y > \frac{4}{5} \text{ ou } x > \frac{1}{5}.$$

Il s'agit de montrer que

$$y \leq \frac{4}{5} \text{ et } x \leq \frac{1}{5} \Rightarrow x + y \leq 1.$$

0,5

On a

$$\begin{aligned} y \leq \tfrac{4}{5} \text{ et } x \leq \tfrac{1}{5} &\Rightarrow y + x \leq \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5} \\ &\Rightarrow x + y \leq 1. \end{aligned}$$

1

Exercice 2. (6.5 points)

1. Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

   (a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :
   On a $0\mathcal{R}2$, car

$$0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2.$$

   Mais, $2 \not\mathcal{R} 0$, car

$$2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0.$$

1

   (b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique : On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$\begin{cases} 0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \\ \text{et} \\ 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0. \end{cases}$$

1

   Mais $0 \neq -1$.

2. On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[,\ x\,\mathcal{S}\,y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

      i. Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a

$$x^2 - x^2 = 0 = x - x.$$

      Donc,

$$x^2 - x^2 \leq x - x.$$

      Par suite,

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[,\ x\mathcal{S}x.$$

      D'où, $\mathcal{S}$ est réflexive.

1

      ii. Antisymétrie de $\mathcal{S}$: Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$. On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 \geq x - y. \end{cases}$$

1,5

      Par suite,

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

On a

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 = x - y &\Longrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0. \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \ \ \text{(impossible, car } x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[\text{)}. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y.$$

D'où l'antisymétrie de $\mathcal{S}$.

iii. Transitivité de $\mathcal{S}$: Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$. On a

$$
\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{array} \right. &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.
\end{aligned}
$$

1

Donc

$$\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z.$$

D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.

De i., ii. et iii., on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

(b) Cet ordre est total : En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On a

$$
\begin{aligned}
& x^2 - y^2 \leq x - y \ \text{ ou } \ x^2 - y^2 \geq x - y \\
\Longrightarrow \ & x^2 - y^2 \leq x - y \ \text{ ou } \ y^2 - x^2 \leq y - x \\
\Longrightarrow \ & x\mathcal{S}y \ \text{ ou } \ y\mathcal{S}x.
\end{aligned}
$$

1

Exercice 3. (09points)

On considère les deux applications suivantes :

$$
\begin{array}{rccl}
f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & f(x) = 3 - 2x
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rccl}
g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & g(x) = x^2.
\end{array}
$$

1. (a) Injectivité de f : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2)$.

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow 3 - 2x_1 = 3 - 2x_2 \\
&\Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2.
\end{aligned}
$$

0,5

Donc f est injective.

(b) Surjectivité de f : Soit $y \in \mathbb{R}, \exists ?x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Longrightarrow y = 3 - 2x \\
&\Longrightarrow x = \tfrac{3-y}{2}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{3-y}{2} \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

0,5

D'où f est surjective.

2. Calculons $f(\{-4,3\})$, $f(]1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

   (a)
$$\begin{aligned} f(\{-4,3\}) &= \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \{-4,3\} : f(x) = y\} \\ &= \{f(-4), f(3)\} \\ &= \{11, 3\}. \end{aligned}$$
0,5

   (b)
$$\begin{aligned} f(]1,\infty[) &= \{y \in \mathbb{R}/\exists x \in]1,\infty[: f(x) = y\} \\ &=]-\infty, 1[\text{ (car } f \text{ est décroissante).} \end{aligned}$$
0,5

   (c)
$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,0[) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in]-\infty, 0[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-\infty < f(x) < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-\infty < 3-2x < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/-\infty < 3-2x \text{ et } 3-2x < 0\} \end{aligned}$$
0,5

   Donc
$$f^{-1}(]-\infty,0[) =]-\infty,+\infty[\cap]\frac{3}{2},+\infty[=]\frac{3}{2},+\infty[.$$

3. Déterminons l'application gof et calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$.

   (a) Déterminons l'application gof : Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= (3-2x)^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$
1

   Donc
$$\begin{aligned} gof: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (gof)(x) = 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

   (b) Calculons $(gof)(0)$, $(gof)(3)$ et $(gof)^{-1}(\{-1\})$:
$$(gof)(0) = 4(0)^2 - 12 \times 0 + 9 = 9.$$
0,5
$$(gof)(3) = 4(3)^2 - 12 \times (3) + 9 = 9$$
0,5
$$\begin{aligned} (gof)^{-1}(\{-1\}) &= \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) \in \{-1\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/(gof)(x) = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 12x + 9 = -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 12x + 10 = 0\} \ (\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3 < 0) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$
1

4. (a) Injectivité de gof : gof n'est pas injective car $y = 9$ admet deux antécédents (d'après la question précédente) $(gof)(0) = (gof)(3) = 9$ mais $0 \neq 3$. 0,5

   (b) Surjectivité de gof : gof n'est pas surjective car $y = -1$ n'a pas d'antécédents (d'après la question précédente). 0,5

   (c) Bijectivité de gof : gof n'est pas bijective car elle n'est pas surjective (ou car elle n'est pas injective). 0,5

5. (a) Donnons des intervalles I et J, tels que l'application $gof : I \longrightarrow J$ soit bijective :
Résolvons l'équation $y = (gof)(x)$ où $y \in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.
$y = 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - y = 0$
$\Delta = 144 - 4 \times 4(9 - y) = 16y$
$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, +\infty[$
les racines sont $x_1 = \dfrac{12 + \sqrt{16y}}{8} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2}$, et $x_2 = \dfrac{12 - \sqrt{16y}}{8} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2}$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
gof'(x)		—	0	+	
gof(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Il est facile de vérifier que $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ est une bijection.
Remarque : on peut aussi considérer la bijection
$gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$.

1

(b) Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque $(gof)^{-1}$: L'application réciproque de la bijection $gof : I = [\frac{3}{2}, +\infty[\longrightarrow J = [0, +\infty[$ est la suivante :

$$\begin{array}{rll} (gof)^{-1} : & [0, +\infty[& \longrightarrow [\frac{3}{2}, +\infty[\\ & y & \longmapsto (gof)^{-1}(y) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{y}}{2} \end{array}$$

1

Remarque : L'application réciproque de la bijection
$gof : I =]-\infty, \frac{3}{2}] \longrightarrow J = [0, +\infty[$ est

$$\begin{array}{rll} (gof)^{-1} : & [0, +\infty[& \longrightarrow]-\infty, \frac{3}{2}] \\ & y & \longmapsto (gof)^{-1}(y) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{y}}{2}. \end{array}$$