Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Décembre 2020

Corrigé de l'examen de Rattrapage de Maths 1

Exercice 1. (12.5points)
soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

1) Calculons $f(\{-1,1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.

$$\begin{aligned} f(\{-1,1\}) &= \{f(x)/x\in\{-1,1\}\} \\ &= \{f(-1),f(1)\} \\ &= \{\tfrac{1}{2}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-1\}) &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\{-1\}\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/f(x)=-1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/\frac{1}{1+x^2}=-1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/x^2=-2\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Injectivité de f : f n'est pas injective car $y=\frac{1}{2}$ admet deux antécédants (d'aprés la question précédente c-à-d $f(1)=f(-1)=\frac{1}{2}$).
- Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y=-1$ n'a pas d'antécédent (d'aprés la question précédente).
- Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

3) Donnons des intervalles I et J, tels que l'application $f : I \longrightarrow J$ soit bijective :
Résolvons l'équation $y=f(x)$ où $y\in J$ et x à déterminer d'une manière unique dans I.
$y=\frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow yx^2+y-1=0$
$\Delta=-4y(y-1)$
$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y\in]0,1[$
les racines sont $x_1=\frac{-\sqrt{y(1-y)}}{y}$, et $x_2=\frac{\sqrt{y(1-y)}}{y}$
Il est facile de vérifier que $f : I=]0,+\infty[\longrightarrow J=]0,1[$ est une bijection.
Remarque : on peut aussi considérer la bijection $f : I=]-\infty,0[\longrightarrow J=]0,1[$.
Déterminons, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1} : L'application réciproque de la bijection $f : I=]-\infty,0[\longrightarrow J=]0,1[$ est la suivante :

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad J=]0,1[&\longrightarrow I=]-\infty,0[\\ y &\longmapsto f^{-1}(y)=\frac{-\sqrt{y(1-y)}}{y}. \end{aligned}$$

.

4) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_1$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ , \ x\mathcal{R}_1 y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

(i) Réflexivité de $\mathcal{R}_1$: Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = f(x) \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 x$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}_1 x$. D'où la réflexivité de $\mathcal{R}_1$.

(ii) Symétrique de $\mathcal{R}_1$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$: $x\mathcal{R}_1 y$. Montrons que $y\mathcal{R}_1 x$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}_1 y &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow f(y) = f(x) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow y\mathcal{R}_1 x$. D'où la symétrie de $\mathcal{R}_1$

(iii) Transitivité de $\mathcal{R}_1$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x\mathcal{R}_1 y$ et $y\mathcal{R}_1 z$. Montrons que $x\mathcal{R}_1 z$. On a

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}_1 y \\ et \\ y\mathcal{R}_1 z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = f(y) ...(1) \\ et \\ f(y) = f(z) ...(2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \text{(1)+(2)} &\Longrightarrow f(x) = f(z) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z \end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y et y\mathcal{R}_1 z \Longrightarrow x\mathcal{R}_1 z$. D'où la transitivité de $\mathcal{R}_1$.

De (i), (ii), (iii), on a $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminons la classe d'équivalence de $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{(\frac{1}{2})} & = & \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}_1 \frac{1}{2}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\frac{1}{2})\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : 4 + 4x^2 = 5\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{1}{2}\} \\ & = & \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}. \end{array}$$

5) Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}_2$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x\mathcal{R}_2 y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$\mathcal{R}_2$ n'est pas une relation d'ordre, car elle n'est pas antisymétrique. En effet, on a $2\mathcal{R}(-2)$ et $(-2)\mathcal{R}2$, car

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1+2^2} \geq \frac{1}{1+(-2)^2} \\ \text{et} \\ \frac{1}{1+(-2)^2} \geq \frac{1}{1+2^2}, \end{array}\right.$$

mais $2 \neq -2$.

Exercice 2. (7.5 points)

1. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n}}_{P(n)}.$$

Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \text{ et } 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

Autrement dit, $P(1)$ est vraie.
Soit $n \geq 1$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+n}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{1+(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{1+n} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2) - (n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(n)$ est vraie.

2. Soient a et b deux réels tel que $a \neq -3b$. Montrons par contraposition que

$$a \neq \frac{-14b}{3} \Longrightarrow \frac{2a+b}{a+3b} \neq 5.$$

Il s'agit de montrer que

$$\frac{2a+b}{a+3b} = 5 \Longrightarrow a = \frac{-14b}{3}.$$

On suppose que $\dfrac{2a+b}{a+3b} = 5$ et on montre que $a = \dfrac{-14b}{3}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{2a+b}{a+3b} = 5 &\Longrightarrow 2a+b = 5(a+3b) \\ &\Longrightarrow -3a = 14b \\ &\Longrightarrow a = \frac{-14b}{3}. \end{aligned}$$

3. Montrons par l'absurde que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{4+x^3} \neq 2 + \frac{x^3}{4}.$$

On suppose que

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{4+x^3} = 2 + \frac{x^3}{4}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{4+x^3} = 2 + \tfrac{x^3}{4} &\Longrightarrow 4 + x^3 = 4 + \tfrac{x^6}{16} + x^3 \\ &\Longrightarrow \tfrac{x^6}{16} = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

Finalement, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{4+x^3} \neq 2 + \frac{x^3}{4}$.