Chougui.

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Examen de rattrapage de MATHS 2
Durée : 2 heures

Exercice n° 1. ***(4pts.)*** Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. Déduire la relation entre I_n et I_{n-3}.
4. Calculer $\int_0^1 (x^3 + 2x) \sqrt{1-x}dx$.

1.5

Exercice n° 2. ***(9pts.)***

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre donnée par
$$\left(x^2+1\right) y' - xy = \sqrt{x^2+1}. \tag{1}$$
   (a) Résoudre l'équation différentielle donnée par (1).
   (b) Trouver la solution de l'équation (1) vérifiant $y(1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

1

2. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :
$$y'' - 2y' = 2e^{2x} + 4x - 1. \tag{2}$$
   (a) Déterminer la solution générale de (2).
   (b) Trouver la solution de l'équation (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

1

Exercice n° 3. ***(7pts.)*** Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
3. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Soit le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + 2z = 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + z = 4 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 2, \end{cases} \qquad (S)$$
   (a) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle.
   (b) Résoudre le système (S) par la méthode de la matrice inverse.

1.5

Bon courage

Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie, Département de Technologie

Année universitaire 2017-2018
Juin 2018

Corrigé de l'examen de rattrapage de MATHS 2

Exercice n° 1. Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculons I_0 : On a
   $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$ 0.5
2. Montrons que $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$: Utilisons l'intégration par parties et posons

$$\begin{aligned} u(x) &= x^n & \Longrightarrow \quad & u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) &= \sqrt{1-x} & \Longrightarrow \quad & v(x) = -\tfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

   On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= -\tfrac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + \tfrac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x} \\ &= \tfrac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - \tfrac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x} = \tfrac{2n}{3}I_{n-1} - \tfrac{2n}{3}I_n \\ &= \tfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}. \end{aligned}$$

   1.5

3. Déduire la relation entre I_n et I_{n-3} pour $n \geq 3$: En utilisant la question (2), on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \tfrac{2n}{2n+3}I_{n-1} \\ &= \left(\tfrac{2n}{2n+3}\right)\left(\tfrac{2(n-1)}{2(n-1)+3}\right)I_{n-2} \\ &= \left(\tfrac{2n}{2n+3}\right)\left(\tfrac{2(n-1)}{2(n-1)+3}\right)\left(\tfrac{2(n-2)}{2(n-2)+3}\right)I_{n-3} \\ &= \left(\tfrac{8n^3-24n^2+16n}{8n^3+12n^2-2n-3}\right)I_{n-3}. \end{aligned}$$

   1

4. Calcul de $\int_0^1 (x^3+2x)\sqrt{1-x}dx$: En utilisant les questions précédentes, on obtient
   $\int_0^1 (x^3+2x)\sqrt{1-x}dx = I_3 + 2I_1 = \left(\frac{16}{105}+\frac{4}{5}\right)I_0 = \frac{20}{21}I_0 = \frac{40}{63}.$ 1

Exercice n° 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle

$$(x^2+1)y' - xy = \sqrt{x^2+1}. \tag{1}$$

   a-1) Résolution de l'équation homogène associée à (2) : L'équation homogène associée est

$$(x^2+1)y' - xy = 0 \ldots\ldots (E_0)$$

   Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{y'}{y} = \tfrac{x}{x^2+1} \Longrightarrow \tfrac{dy}{y} &= \tfrac{1}{2}\tfrac{2x}{x^2+1}dx \\ \Longrightarrow \ln|y| &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + K_1,\ K_1 \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow y &= C_1\sqrt{x^2+1},\ C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

   1.5

   $y = 0$ est une solution évidente de (E_0) . Finalement, la solution générale de (E_0) est

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1},\ C \in \mathbb{R}.$$

a-2) Résolution de l'équation non homogène (1). Utilisons la méthode de la variation de la constante : on a $y(x) = C(x)\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y'(x) = C'(x)\sqrt{x^2+1} + \frac{xC(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. En remplaçant y et y' dans l'équation non homogène par leurs formules respectives, on obtient $C'(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow C(x) = \arctan(x) + K$. Donc la solution générale est $y(x) = (\arctan(x) + K)\sqrt{x^2+1},\ K \in \mathbb{R}$.

1.5

b) Trouvons la solution de l'équation (1) vérifiant $y(1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$: On a

$$y(1) = (\arctan(1) + K)\sqrt{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Longrightarrow K = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement, la solution est

$$y(x) = \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{x^2+1}.$$

1

2. Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' - 2y' = 2e^{2x} + 4x - 1. \tag{2}$$

a-1) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (2) : L'équation homogène associée à (2) est

$$y'' - 2y' = 0 \quad ....(E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est

$$r^2 - 2r = 0 \quad ....(EC)$$

(EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 2$ et $r_2 = 0$. Donc la solution générale de (E_0) est

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1

a-2) Détermination de solution particulière de (2). On a le second membre $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 2e^{2x} + 4x - 1$. Donc la solution particulière y_p est de la forme $\alpha x e^{2x} + (\beta x^2 + \gamma x)$ car 2 et 0 sont des racines de l'équation caractéristique. Il reste maintenant à trouver les constantes α, β et γ. On a $y_p' = \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x} + 2\beta x + \gamma$ et $y_p'' = 4\alpha e^{2x} + 4\alpha x e^{2x} + 2\beta$. En remplaçant y_p' et y_p'' dans (2) par leurs formules respectives, on obtient : $2\alpha e^{2x} - 4\beta x + 2(\beta - \gamma) = 2e^{2x} + 4x - 1$. Par identification, on a alors $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = -\frac{1}{2}$. Donc la solution particulière est

$$y_p = xe^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}x.$$

2.5

a-3) Détermination de la solution générale de (2) : La solution générale de (2) est

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_0(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 + xe^{2x} - x^2 - \tfrac{1}{2}x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Cherchons la solution de (2) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On a

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + e^{2x} + 2xe^{2x} - 2x - \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 = \frac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{4} \\ C_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

1

6.5

Finalement, la solution est

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{1}{4} + xe^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Exercice n° 3. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons A^2 : On a

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$ 1

2. Calculons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$: On a

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha & 4\alpha \\ \frac{\alpha}{2} & \beta & 2\alpha \\ \frac{\alpha}{4} & \frac{\alpha}{2} & \beta \end{pmatrix}$$ 1.5

Par identification, on obtient $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Donc $A^2 = A + 2I_3$.

3. Déduction que A est inversible et donner son inverse : On a $A^2 = A + 2I_3 \Rightarrow A^2 - A = 2I_3 \Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Rightarrow A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Donc A est inversible et son inverse 1

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 1

4. Forme matricielle et résolution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + 2z = 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + z = 4 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 2, \end{cases} \qquad (S)$$

(a) Forme matricielle de (S). En terme matriciel, (S) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ 1

(b) Résolution de (S) par la méthode de la matrice inverse. On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$ 1.5