Examen de Remplacement de Physique 1

Exercice 01 : (07 pts)

Dans un plan muni d'un système d'axes $\boldsymbol{OXY}$, un point matériel se déplace sur une courbe d'équation :

$$\boldsymbol{\rho = 2R\ \cos\theta}$$

Où $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\theta}$ son ses coordonnées polaires et $\boldsymbol{R}$ une constante positive.

1. Exprimer l'équation de sa trajectoire en coordonnées cartésiennes. Quelle est sa nature ?

2. Dans la base $(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}})$ associée au coordonnées polaires, exprimer les vecteurs position $\vec{\boldsymbol{r}}$, vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$ et accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ en fonction de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ et $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$. $\quad (\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\theta}{dt}$ et $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d^2\theta}{dt^2})$

3. Dans la suite, on supposera que $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ est constante. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Quelle est la nature du mouvement ?

4. Ecrire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\boldsymbol{u_t}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$ de la base intrinsèque dans la base $(\overrightarrow{\boldsymbol{e_\rho}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}})$.

Exercice 02 : (05 pts)

L'accélération d'un point matériel $\boldsymbol{M}$ en fonction du temps, en coordonnes intrinsèques, est donnée par l'expression :

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha}\, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}}\, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}$$

où $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{t}}$ et $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{n}}$ sont les vecteurs unitaires du trièdre de Frénet et α et β des constantes positives.

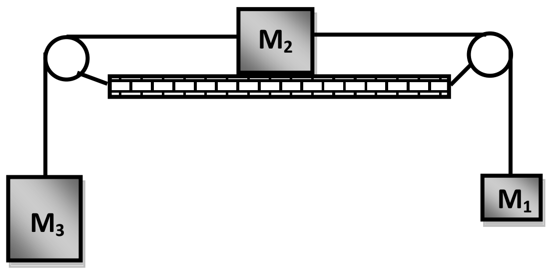
1. Donner les dimensions des constantes α et β.

2. Déterminer l'abscisse curviligne $\boldsymbol{s(t)}$ du point matériel M sachant qu'à l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, il est au repos et $\boldsymbol{s(t = 0) = 0}$.

3. Déterminer l'expression du rayon de courbure $\mathbf{R_c}$ de la trajectoire. En déduire la nature du mouvement.

Exercice 3: (8 points)

Trois corps M_1, M_2 et M_3 de masses respectives $m_1 = 1\,kg, m_2 = 2\,kg\ et\ m_3 = 4\,kg$, sont reliés par l'intermédiaire de deux fils inextensibles passant par les gorges de deux poulies de masses négligeables (Figure ci-contre). On prend : $g = 10\,m/s^2$



1. En l'absence de frottement entre M_2 et le plan horizontal:

a- Déterminer le sens du déplacement de M_2 et calculer son accélération.

b- Calculer la tension de chaque fil.

2. Le contact entre M_2 et le plan est caractérisé par un coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0.35$:

a- Calculer l'accélération du système.

b- Calculer la tension de chaque fil.

Corrigé

Exercice 1 : *(07 pts)*

1. Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes : $(x-R)^2+y^2=R^2$ *1 pt*

Nature de la trajectoire : Cercle de rayon R et de centre $C(R,0)$. *0.5 pts*

2. Expression des vecteurs position, vitesse et accélération :

- Le vecteur position : $\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho = 2R\cos\theta\;\vec{e}_\rho$ *0.5 pts*
- Le vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = 2R\dot{\theta}\,(-\sin\theta\;\vec{e}_\rho + \cos\theta\;\vec{e}_\theta)$ *1 pt*
- Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(2R\ddot{\theta}\,sin\theta - 4R\dot{\theta}^2\,cos\theta\right)\vec{e}_\rho + (2R\ddot{\theta}\,cos\theta - 4R\dot{\theta}^2\,sin\theta)\vec{e}_\theta$$ *1 pt*

3. On a : $\dot{\theta} = Cte$, donce $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0$.

- La composante tangentielle de l'accélération : $\|\vec{v}\| = 2R\dot{\theta}$ donc : $a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$ *0.5 pts* *0.5 pts*
- La composante normale de l'accélération : $a_n = \frac{v^2}{R_c} = \frac{4R^2\dot{\theta}^2}{R} = 4R\dot{\theta}^2$ *0.5 pts* *0.5 pts*
- Nature du mouvement :

$$\left\{\begin{matrix} trajectoire\ circulaire => mouvement\ circulaire \\ a_t = 0 \qquad => mouvement\ uniforme \end{matrix}\right\} => mouvement\ circulaire\ uniforme$$ *0.5*

4. Les vecteur unitaires de la base intrinsèque :

$$\overrightarrow{u_t} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\sin\theta\;\vec{e}_\rho + \cos\theta\;\vec{e}_\theta$$ *0.5 pts*

$$\overrightarrow{u_n} = \frac{\overrightarrow{a_n}}{\|\overrightarrow{a_n}\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -\cos\theta\;\vec{e}_\rho - \sin\theta\;\vec{e}_\theta\ ;\quad \text{puisque : } a_t = 0$$ *0.5 pts*

Exercice 2 : (05 pts)

L'accélération du point M est : $\vec{a} = \alpha\,\vec{u}_t + \beta\,t^2\,\vec{u}_n$; donc : $a_t = \alpha$ et $a_n = \beta\,t^2$

1. Dimensions des constantes α et β :

$$[\alpha] = [a] = LT^{-2}$$ *0.5 pts*

$$[\beta] = \frac{[a]}{[t^2]} = LT^{-4}$$ *0.5 pts*

2. L'abscisse curviligne $s(t)$ du point matériel M.

On a : $a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha \;=> dv = \alpha\,dt$; *0.5 pts*

l'intégration avec la condition initiale : $s(t=0)=0$, donne : $v = \alpha t$ *0.5 pts*

Et $v = \frac{ds}{dt} = \alpha t => ds = \alpha t\,dt$; *0.5 pts*

l'intégration avec la condition initiale : $v(t=0)=0$, donne : $s = \frac{1}{2}\alpha^2 t$ *0.5 pts*

3. On a : $a_n = \frac{v^2}{R_c} \;=>\; R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 t^2}{\beta\,t^2} = \frac{\alpha^2}{\beta}$ *1 pt*

Nature du mouvement: $\left\{\begin{matrix} R_c = \frac{\alpha^2}{\beta} = Cte \quad => \quad trajectoire\ circulaire \\ a_t = \alpha = Cte \;=> mouvement\ uniformement\ vari\acute{e} \end{matrix}\right\}$,

donc le mouvement est circulaire uniformément varié. *1 pt*

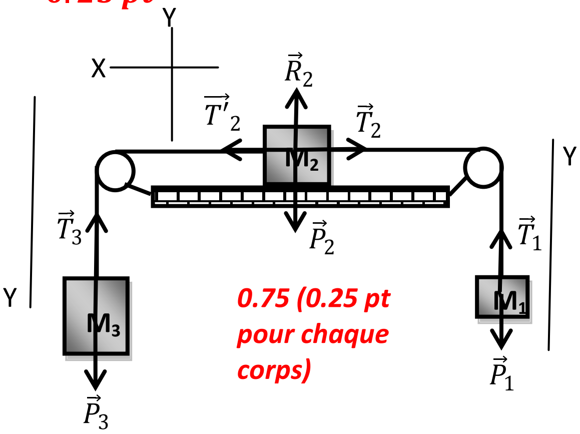
Exercice 3

I.

a- En l'absence des frottements et puisque $m_3 > m_1$, donc M_2 se déplace de gauche à droite (M_3 vers le bas et M_1 vers le haut) **0.25 pt**

L'accélération des deux corps et la tension du fil :

$$PFD: \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (m_1): \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \\ (m_2): \vec{P}_2 + \vec{T'}_2 + \vec{T}_2 + \vec{R}_2 = m_2\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \\ (m_3): \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \end{cases}$$



Projections : $(m_1): (OY): T_1 - P_1 = m_1 a \quad (1)$ **0.25 pt**

$$(m_2): \begin{cases} (OX): T'_2 - T_2 = m_2 a \quad (2) & \mathbf{0.25\ pt} \\ (OY): R_2 - P_2 = 0 & \mathbf{0.25\ pt} \end{cases}$$

$(m_3): (OY): P_3 - T_3 = m_3 a \quad (3)$ **0.25 pt**

Le fil est inextensible et de masse négligeable

$T_1 = T_2$ et $T_3 = T'_2$

(1) + (2) + (3) donne : $P_3 - P_1 = (m_1 + m_2 + m_2)a$

$\boldsymbol{a = \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3} g}$ **0.5 pt** A.N $\boldsymbol{a \approx 4.3 m.s^{-2}}$ **0.25 pt**

b- Tension des fils :

$T_1 = T_2 = P_1 + m_1 a = 14.3N$ **0.25 pt**

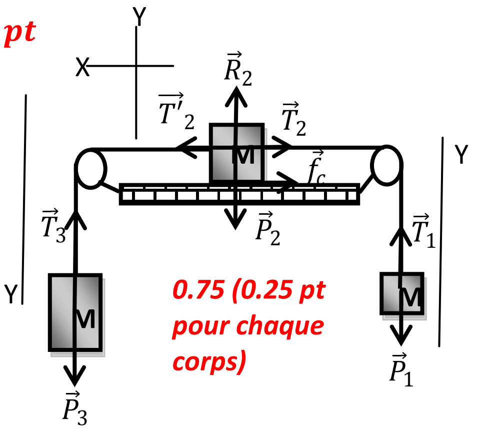
$\boldsymbol{T'_2 = T_3 = P_3 - m_3 a = 22.8\,N}$ **0.25 pt**

II.

c-

L'accélération des deux corps et la tension du fil :

$$PFD: \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} (m_1): \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \\ (m_2): \vec{P}_2 + \vec{T'}_2 + \vec{T}_2 + \vec{f}_c + \vec{R}_2 = m_2\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \\ (m_3): \vec{P}_3 + \vec{T}_3 = m_3\vec{a} & \mathbf{0.25\ pt} \end{cases}$$



Projections : $(m_1): (OY): T_1 - P_1 = m_1 a \quad (1)$ **0.25 pt**

$$(m_2): \begin{cases} (OX): T'_2 - T_2 - f_c = m_2 a \quad (2) & \mathbf{0.25\ pt} \\ (OY): R_2 - P_2 = 0 & \mathbf{0.25\ pt} \end{cases}$$

$(m_3): (OY): P_3 - T_3 = m_3 a \quad (3)$ **0.25 pt**

$f_c = \mu_c R_2 = \mu_c P_2$ **0.25 pt**

Le fil est inextensible et de masse négligeable $T_1 = T_2$ et $T_3 = T'_2$

(1) + (2) + (3) donne : $P_3 - P_1 - \mu_c P_2 = (m_1 + m_2 + m_2)a$

$a = \frac{m_3 - (m_1 + \mu_c m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} g$ **0.5 pt** A.N $a \approx 3.3 m.s^{-2}$ **0.25 pt**

d- La tension des fils :

$T_1 = T_2 = P_1 + m_1 a = 13.3N$ **0.25 pt**

$T'_2 = T_3 = P_3 - m_3 a = 26.8N$ **0.25 pt**